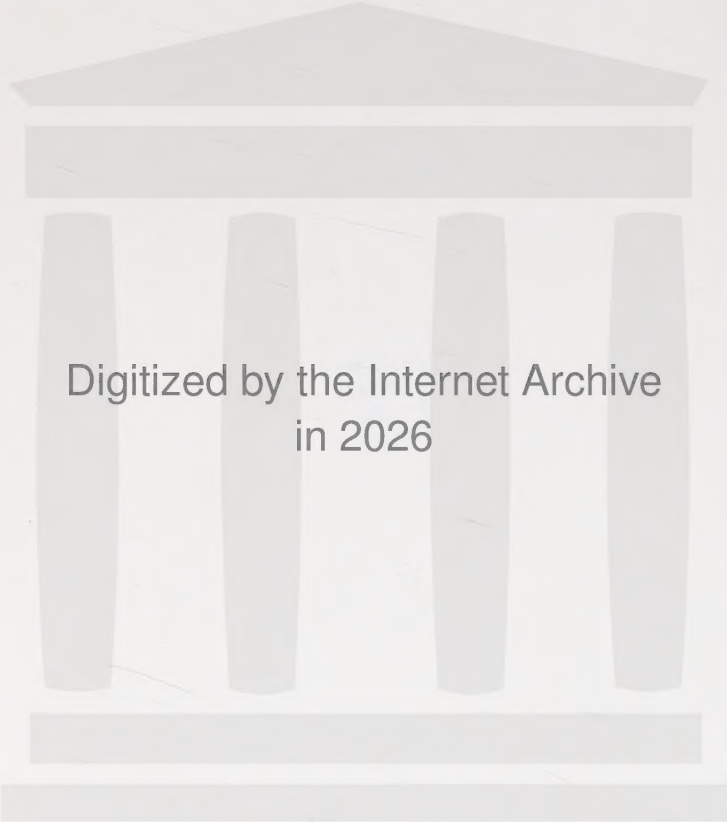


Zur unteren Fehlergrenze
von Quadraturverfahren

Diss. Erlangen
1983

von
Erich Novak
aus
Nürnberg





Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546218_0074

The United States
of America

The Department of the Interior
The United States Geological Survey
Washington, D. C.
Bureau of Geology

1900
No.
5000
100
1000

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 20.5.1983

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. K. Jacobs

Erstberichterstatter: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Berens

Zur unteren Fehlergrenze von Quadraturverfahren

Inhaltsverzeichnis:

<u>Einleitung</u>	i - vii
<u>Bezeichnungen</u>	viii - xi
<u>Kapitel 1</u>	
<u>Allgemeine Eigenschaften der n-ten unteren Fehlergrenze von Quadraturverfahren</u>	1
1.1 Grundlegende Definitionen und Bemerkungen	1
1.2 Abschätzung von $e_n(B)$ von oben durch die n-te Weite und Folgerungen	5
1.3 Abschätzung der $e_n(B, \mu)$ von unten	9
1.4 Zu dem Problem $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ bzw. $e_n(B) \rightarrow 0$	14
<u>Kapitel 2</u>	
<u>Die n-te untere Fehlergrenze von Quadraturverfahren für spezielle Funktionenklassen</u>	18
2.1 Die Größen $e_n(B, \mu)$ und $e_n(B)$ für die Einheitskugeln von Sobolev-Räumen	18
2.2 Die Größen $e_n(B)$ für Vektorräume	38
<u>Kapitel 3</u>	
<u>Die n-ten stochastischen unteren Fehlergrenzen von stochastischen Quadraturverfahren</u>	44
3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften der Größen $\sigma_n(B, \mu)$ und $\sigma_n(B)$	44
3.2 Die Größen $\sigma_n(B, \mu)$ und $\sigma_n(B)$ für spezielle Funktionenklassen B	49
<u>1. Anhang</u>	
Ausdehnung einiger Resultate auf allgemeinere Grundbereiche	57
<u>2. Anhang</u>	
Zusammenhang mit einfachsten linearen Integralgleichungen	62
<u>3. Anhang</u>	
Eine abstraktere Formulierung der Ergebnisse über das asymptotische Verhalten von $e_n(B)$ und $\sigma_n(B)$ für Sobolev-Klassen mit Anwendungen auf Besov-Klassen	66
<u>Literaturverzeichnis</u>	74

Einleitung

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist folgende Situation:

Gegeben sei ein kompakter (Hausdorff-)Raum K , ein (Radon-)Maß μ auf K und eine Menge B von stetigen, reellwertigen Funktionen auf K . Gesucht sei eine Quadraturformel μ_n , die n Stützstellen benutzt (d.h. von der Form $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ ist) und das Maß μ auf der Menge B möglichst gut approximiert. Dieses Problem führt auf die Definition der n -ten unteren Fehlergrenze

$$e_n(B, \mu) = \inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{f \in B} |\mu(f) - \mu_n(f)|,$$

die angibt, welchen Fehler man mindestens in Kauf nehmen muß, wenn man μ auf der Menge B durch ein $\mu_n \in M_n$ ersetzt. Dabei sei M_n die Menge der Quadraturformeln, die n Stützstellen benutzen.

Weiter betrachten wir die Größe

$$e_n'(B) = \sup_{\substack{\mu \in M \\ \|\mu\| \leq 1}} e_n(B, \mu),$$

wobei sich das Supremum über alle (Radon-)Maße mit Norm höchstens 1 erstreckt. Diese Zahl beschreibt eine geometrische Eigenschaft von $B \subseteq C(K)$, nämlich die Eigenschaft der Approximierbarkeit beschränkter linearer Funktionale auf B durch Punktfunktionale.

Es verwundert nicht, daß $e_n(B)$ zusammenhängt mit der n -ten Weite $d_n(B)$ im Sinne von Kolmogorov, die definiert ist durch:

$$d_n(B) = \inf_{X_n} \sup_{f \in B} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_{\infty}.$$

(Hierbei durchlaufe X_n die Menge aller n -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten von $C(K)$).



In den Anwendungen werden nicht beliebige $B \subseteq C(K)$ untersucht, sondern meist solche, die symmetrisch und konvex sind. Die Menge B ist dann die Einheitskugel bezüglich einer Halbnorm, die auf einem Raum $V \subseteq C(K)$ erklärt ist.

Ist $\| \cdot \|$ die dazugehörige Norm im Dualraum V' , so gilt

$$e_n(B, \mu) = \inf_{\mu_n \in M_n} \|\mu - \mu_n\|.$$

Wir geben nun einen Überblick über den Inhalt von Kapitel 1 und 2.

Abschnitt 1.1 gibt für den Fall, daß K metrisch ist, eine einfache Charakterisierung derjenigen $B \subseteq C(K)$, für die gilt:

Jedes punktweise konvergente Quadraturverfahren
ist auf B gleichmäßig konvergent.

(Genaue Definitionen siehe dort.) Außerdem werden grundlegende Definitionen und Bemerkungen (etwa zur Existenz optimaler Quadraturformeln) gegeben.

Abschnitt 1.2 behandelt den Zusammenhang zwischen $e_n(B)$ und $d_n(B)$. Mit Hilfe des Interpolationssatzes wird gezeigt, daß für beliebige symmetrische Mengen $B \subseteq C(K)$ gilt:

$$e_n(B) \leq 2d_n(B).$$

Hierbei ist die Konstante 2 bestmöglich. Betrachtet wird dann die Frage, wie sich e_n und d_n verhalten, wenn man von einer Menge B zu $B + V$ übergeht, mit endlichdimensionalem V . Hier zeigen sich bereits wesentliche Unterschiede zwischen d_n und e_n . Diese Überlegungen werden dann auf die Hölder-Klassen $C^{k,\alpha}([0,1]^S)$ und die Sobolev-Klassen $W_p^k([0,1]^S)$ angewendet.

Abschnitt 1.3 behandelt die Abschätzung von $e_n(B, \mu)$ und $e_n(B)$ von unten. Zunächst ergibt die Ungleichung $e_n(B) \leq 2 \cdot d_n(B)$, daß gilt:

Aus $d_n(B) \rightarrow 0$ folgt $e_n(B) \rightarrow 0$.

Wir zeigen an einem Beispiel, daß die Umkehrung falsch ist:

Die Klasse der B für die $(e_n(B))$ Nullfolge ist, ist größer als die entsprechende Klasse für d_n .

Wir stellen weiterhin fest, daß die wichtigsten Abschätzungen der Zahlen $d_n(B)$ von unten sich nicht auf solche der $e_n(B)$ übertragen lassen.

Wir geben (nach Bahvalov) eine Methode zur Abschätzung der $e_n(B, \mu)$ von unten an und zeigen, wie diese sich in die allgemeine Theorie der optimalen Algorithmen (wie sie von Traub, Wozniakowski dargestellt wird) einfügt.

Aus den Ergebnissen von Abschnitt 1.2 und 1.3 erhalten wir als unmittelbare Anwendung das asymptotische Verhalten von

$e_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S))$:

Für $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$ gilt:

$$e_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{s}}.$$

Das asymptotische Verhalten von $d_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S))$ und von $e_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S), \lambda^S)$ war schon bekannt und stimmt überein mit dem von $e_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S))$. Viel schwieriger ist die Frage nach dem Verhalten von $e_n({}^1W_p^k([0, 1]^S))$. Diese Frage wird erst in Abschnitt 2.1 beantwortet.

In Abschnitt 1.4 behandeln wir das Problem, für welche $B \subseteq C(K)$ die Größen $e_n(B, \mu)$ bzw. $e_n(B)$ gegen 0 konvergieren. Während das

entsprechende Problem für d_n einfach zu lösen ist, müssen wir uns hier mit einigen signifikanten Beispielen zufrieden geben.

Kapitel 2 behandelt das Verhalten der Größen $e_n(B, \mu)$ und $e_n(B)$ für gewisse spezielle Mengen B , wobei neue Überlegungen nötig werden. (Die Klassen $C^{k, \alpha}([0, 1]^S)$ wurden als Beispiele der dort dargestellten Theorie bereits in 1.3 behandelt).

In Abschnitt 2.1 zeigen wir:

Satz:

Ist $k, s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ mit $p \cdot k > s$, so gilt:

$$e_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^S)) \asymp e_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k}{s}}.$$

Der Beweis dieses Satzes ist relativ umfangreich, er benützt neben verschiedenen bekannten Ungleichungen eine spezielle Zerlegungstechnik für Maße auf $[0, 1]^S$ (die auch in Abschnitt 3.2 und im 3. Anhang angewendet wird).

Interessant ist, daß das asymptotische Verhalten von e_n und d_n bei den Sobolev-Klassen (etwa im Gegensatz zu den Hölder-Klassen) i.a. nicht übereinstimmt.

In Abschnitt 2.2 betrachten wir die Größe $e_n(B)$ für Vektorräume B . Für d_n gilt die einfache Aussage:

$$\begin{aligned} \dim B = m &\Rightarrow d_n(B) = \infty \quad \text{für } n < m \text{ und} \\ d_n(B) &= 0 \quad \text{für } n \geq m. \end{aligned}$$

Ist der Grundraum K zerstreut, so gilt analog:

$$\begin{aligned} \dim B = m &\Rightarrow e_n(B) = \infty \quad \text{für } n < m \text{ und} \\ e_n(B) &= 0 \quad \text{für } n \geq m. \end{aligned}$$

Nicht so einfach ist die Situation, wenn K nicht zerstreut ist.

Es gilt:

Ist K nicht zerstreut, so existiert sogar ein

unendlich dimensionaler Vektorraum $B \subseteq C(K)$

mit der Eigenschaft $e_1(B) = 0$.

Um positive Maße auf $[0,1]$ auf dem Raum P_m der Polynome vom Grad $< m$ exakt zu integrieren, benötigt man nur rund $\frac{1}{2} m$ Stützstellen (sog. Gauß'sche Quadraturverfahren). Als Gegenstück dazu zeigen wir:

Für $K = [0,1]$ und $n < m$ gilt: $e_n(P_m) = \infty$.

In Kapitel 3 betrachten wir stochastische Quadraturverfahren.

Dazu sei wieder K , $\mu \in M(K)$ und eine Funktionenmenge B auf K gegeben. Eine stochastische Quadraturformel Q_n mit n Stützstellen auf K (deren Menge wir mit S_n bezeichnen) ist eine Familie $(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n)$ von Zufallsvariablen mit Verteilung der a_i in $\mathbb{R}$ und der x_i in K . Mit $Q_n(f)$ bezeichnen wir dann die Zufallsvariable

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i),$$

die Güte von $Q_n(f)$ als Approximation von $\mu(f)$ wird gemessen mit der Größe

$$\sigma(Q_n(f), \mu) = (E(Q_n(f) - \mu(f))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(Hierbei bezeichnet E den Erwartungswert.)

Die zu $e_n(B, \mu)$ analoge Größe ist dann

$$\sigma_n(B, \mu) = \inf_{Q_n \in S_n} \sup_{f \in B} \sigma(Q_n(f), \mu).$$

Weiter definieren wir die zu $e_n(B)$ analoge Größe

$$\sigma_n(B) = \sup_{\substack{\mu \in M \\ \|\mu\| \leq 1}} \sigma_n(B, \mu).$$

Zunächst bemerken wir, daß stets gilt:

$$\sigma_n(B, \mu) \leq e_n(B, \mu) \text{ und } \sigma_n(B) \leq e_n(B).$$

Der Abschnitt 3.1 enthält die grundlegenden Definitionen, eine bei Bahvalov implizit enthaltene Abschätzung der Größe $\sigma_n(B, \mu)$ von unten; sowie einen Satz von Ermakov und Zolotukhin, der sehr allgemein die Existenz gewisser stochastischer Quadraturformeln sicherstellt.

In Abschnitt 3.2 wird die Konvergenzordnung der Größen $\sigma_n(B)$ und $\sigma_n(B, \mu)$ für gewisse Funktionenklassen B untersucht.

Wir beweisen folgenden

Satz:

a) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$ und $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sigma_n(\tilde{C}^{k, \alpha}([0, 1]^s), \lambda^s) \asymp \sigma_n(\tilde{C}^{k, \alpha}([0, 1]^s)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{s} - \frac{1}{2}}$$

b) Für $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$ und $pk > s$ gilt:

$$\sigma_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^s), \lambda^s) \asymp \sigma_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^s)) \asymp n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2}}$$

c) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$ und $\mu = g \cdot \lambda^s$ mit beschränktem g gilt:

$$\sigma_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^s), \mu) \asymp n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2}}.$$

Bemerkenswert erscheint hier zweierlei:

- i) Gegenüber den "deterministischen" Quadraturverfahren gewinnt man $-\frac{1}{2}$ im Exponenten
- ii) Stochastische Quadraturverfahren sind auch anwendbar auf große Klassen unstetiger Funktionen (und theoretisch auf solche, die nur fast überall definiert sind).

Als Gegenstück hierzu zeigen wir für $\tilde{B} = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Var}(f) \leq 1\}$:

$$\sigma_n(\tilde{B}) \asymp \sigma_n(\tilde{B}, \lambda) \asymp e_n(\tilde{B}) \asymp e_n(\tilde{B}, \lambda) \asymp \frac{1}{n}.$$

Die Arbeit endet mit drei Anhängen:

Im 1. Anhang werden einige Resultate auf allgemeinere Grundbereiche ausgedehnt. Zunächst wird der Interpolationssatz verallgemeinert auf beliebige beschränkte Funktionale $L : B(X) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $B(X)$ der Raum der beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer beliebigen Menge X ist. Damit wird der Zusammenhang zwischen e_n und d_n auf diesen allgemeinen Fall erweitert. Auch komplexe Maße werden kurz erwähnt. Schließlich machen wir eine Bemerkung über die Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes 2.1.3.11 auf allgemeinere Teilmengen des $\mathbb{R}^S$.

Im 2. Anhang werden Funktionenklassen betrachtet, die mit der Lösung von einfachsten linearen Integralgleichungen zusammenhängen: Die Größe $e_n(B, \mu)$ beschreibt hier den Fehler (bzgl. der ∞ -Norm) von gewissen numerischen Verfahren zur Bestimmung etwa der Lösung einer Volterra-Integralgleichung.

Im 3. Anhang werden zunächst die Ergebnisse über das Verhalten der Größen e_n und σ_n für Sobolev-Klassen aus den Abschnitten 2.1 und 3.2 abstrakter dargestellt und bewiesen. Dadurch lassen sich diese Ergebnisse auf andere Funktionenklassen übertragen, wie am Beispiel der Besov-Klassen gezeigt wird.

Ich danke allen, die mich bei dieser Arbeit begleitet haben. Besonders herzlich danke ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit.

Bezeichnungen

Klassen von Funktionen

$C^{k,\alpha}([0,1]^S)$ bezeichnet die Menge aller $f: [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$,
 ($s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$) für die gilt:

- a) $\|f^{(r)}\| \leq 1$ für alle partiellen Ableitungen einer Ordnung $r \leq k$
 b) $|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq |x - y|^\alpha$
 für alle partiellen Ableitungen der Ordnung k .

$\tilde{C}^{k,\alpha}([0,1]^S)$ bezeichnet die Menge aller $f: [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$,
 ($s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$) für die gilt:

- $|f^{(k)}(x) - f^{(k)}(y)| \leq |x - y|^\alpha$
 für alle partiellen Ableitungen der Ordnung k .

$W_p^k([0,1]^S)$ bezeichnet die Menge aller $f: [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$,
 ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) mit $\|f\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|f^{(\alpha)}\|_p < \infty$
 (Siehe 2.1.1.1)

${}^1W_p^k([0,1]^S)$ bezeichnet die Menge der $f \in W_p^k([0,1]^S)$
 ($k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$) mit $\|f\|_{k,p} = \|f\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|f^{(\alpha)}\|_p \leq 1$.

${}^1\tilde{W}_p^k([0,1]^S)$ bezeichnet die Menge aller $f: [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$,
 mit $\sum_{|\alpha|=k} \|f^{(\alpha)}\|_p \leq 1$

P_n bezeichnet den Raum der Polynome vom Grad $< n$ (meist auf $[0,1]$).

$C(K)$ bezeichnet den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf K .

$P(k,s)$ sei der Raum der Polynome vom Grad $< k$ in s Variablen
 $P_n = P(n,1)$

$L_1(K, \mu)$ Menge der Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, die bezüglich μ integrierbar sind
 $\|f\|_1 = |\mu|(|f|) = \int |f| d|\mu|.$

$L_p(K, \mu)$ entsprechend, $\|f\|_p = (\int |f|^p d|\mu|)^{\frac{1}{p}},$
 $\|f\|_\infty = \text{ess sup } |f|.$

Weitere Bezeichnungen

K	bedeutet einen kompakten (Hausdorff-)Raum
$M(K)$	sei der Dualraum von $C(K)$, d.h. der Raum der Radon-Maße auf K .
$M_n = M_n(K)$	sei die Menge der $\mu_n \in M(K)$, die sich in der Form $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ schreiben lassen.
$d_n(B)$	sei die n-te Weite von B, definiert durch $d_n(B) = \inf_{X_n} \sup_{f \in B} \inf_{g \in X_n} \ f - g\ _{\infty}.$ Hierbei sei $B \subseteq C(K)$ und X_n durchlaufe alle n-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten von $C(K)$.
$e_n(B, \mu)$	bedeutet die Zahl $\inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{f \in B} \mu_n(f) - \mu(f)$, wobei $\mu \in M(K)$ und $B \subseteq C(K)$.
$e_n(B)$	sei $\sup_{\substack{\ \mu\ \leq 1 \\ \mu \in M(K)}} e_n(B, \mu)$.
$a_n \asymp b_n$	bedeutet für zwei Folgen positiver Zahlen, daß $c_1, c_2 > 0$ existieren, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $c_1 \leq a_n : b_n \leq c_2$.
λ, λ^S	bezeichnen das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ bzw. auf $[0,1]^S$.
ϵ_x	sei das Dirac-Maß an der Stelle x, das heißt: $\epsilon_x(f) = f(x).$

$a_n \prec b_n$ bedeutet für zwei Folgen positiver Zahlen,
daß ein $c > 0$ existiert, so daß
 $a_n \leq c \cdot b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\langle f_i, i \in I \rangle$ sei der von den f_i erzeugte Vektorraum

$|\mu|$ bedeutet die Totalvariation (=Modulus) von
 $\mu \in M(K)$

$D^{\alpha} f, f^{(\alpha)}$ partielle Ableitung von f
 α ist ein Multiindex
 $|\alpha|$ die Ordnung der Ableitung

$\text{Var } f$ Variation einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Q_n, S_n, E diese Bezeichnungen werden in 3.1.1 eingeführt

$\sigma(Q_n(f), \mu)$

$\sigma_n(B, \mu), \sigma_n(B)$

Zusätzlich werden einige Bezeichnungen (etwa über Besov-Räume)
im 3. Anhang eingeführt und nur dort benützt.

Kapitel 1

Allgemeine Eigenschaften der n-ten unteren Fehlergrenze von Quadraturverfahren

1.1 Grundlegende Definitionen und Bemerkungen

1.1.1 Einige Bezeichnungen

K sei stets kompakter Hausdorff-Raum, $C(K)$ der Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf K , $M(K)$ sei der Dualraum von $C(K)$. Die Elemente von $M(K)$ sind die Radonmaße auf K , sie stimmen überein mit den regulären Borelmaßen und mit den Bairemaßen auf K . Mit $M_n(K)$ oder kurz M_n werde die Menge der atomaren Maße auf K bezeichnet, die höchstens n Stützstellen haben. Jedes $\mu_n \in M_n$ hat also die Form $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ und wird auch bezeichnet als Quadraturformel mit n Stützstellen.

1.1.2 Definition

Es sei $\mu \in M(K)$ und $\mu_i \in M_1$ (für $i \in \mathbb{N}$).

- a) Gilt $\mu_i(f) \rightarrow \mu(f)$ für jedes $f \in C(K)$, so heißt $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein (punktweise konvergentes) Quadraturverfahren (zu μ).
- b) Ist $B \subseteq C(K)$ und $\lim_{f \in B} \sup |\mu(f) - \mu_i(f)| = 0$, so heißt $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein gleichmäßig auf B konvergentes Quadraturverfahren (zu μ). (Die punktweise Konvergenz der μ_i wird hier also nicht vorausgesetzt.)

1.1.3 Bemerkung

Ist K metrisch, so existiert zu jedem $\mu \in M(K)$ ein punktweise konvergentes Quadraturverfahren.

Ist dagegen K nicht metrisierbar, so existiert zu einem $\mu \in M(K)$ i.a. kein punktweise konvergentes Quadraturverfahren. Z.B. existiert zu dem Maß λ^I auf $[0,1]^I$ (λ ist das Lebesgue-Maß) genau dann ein punktweise konvergentes Quadraturverfahren, wenn I höchstens abzählbar ist.

1.1.4 Bemerkung

Für praktische Fragen ist es wichtig zu wissen, für welche Mengen $B \subseteq C(K)$ gleichmäßig konvergente Quadraturverfahren existieren. Zunächst betrachten wir die Frage, auf welchen Mengen die punktweise konvergenten Quadraturverfahren sogar gleichmäßig konvergieren:

1.1.5 Satz

- a) (BANACH $[1]$) Ist $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein punktweise konvergentes Quadraturverfahren (zu μ), so konvergiert $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jeder relativkompakten Menge $B \subseteq C(K)$.
- b) (GROTHENDIECK $[1]$; Verallgemeinerungen sind bekannt, siehe SCHAEFER $[1]$) Ist K stonesch (d.h. der Abschluß jeder offenen Teilmenge von K ist offen), so konvergiert jedes punktweise konvergente Quadraturverfahren sogar gleichmäßig auf jeder schwach relativkompakten Teilmenge von $C(K)$.

Wir zeigen jetzt, daß für metrische K eine Umkehrung von 1.1.5 a) gilt:

1.1.6 Satz

Es sei K metrisch (und kompakt) und $B \subseteq C(K)$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Jedes punktweise konvergente Quadraturverfahren konvergiert auf B gleichmäßig.
- ii) B ist relativkompakt in $C(K)$.

Beweis:

Zu zeigen ist nur $i \rightarrow ii$. Es sei $B \subseteq C(K)$ nicht relativkompakt. Dann ist B unbeschränkt oder nicht gleichgradig stetig. In beiden Fällen konstruieren wir ein punktweise konvergentes Quadraturverfahren, welches nicht gleichmäßig auf B konvergiert:

- a) Es sei $B \subseteq C(K)$ unbeschränkt. Dann existiert eine Folge

$$(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, x_i \in K \text{ mit der Eigenschaft } \sup_{f \in B} |f(x_i)| \geq i.$$

Es genügt dann, $\mu = 0$ und $\mu_i(f) = \frac{1}{i} f(x_i)$ zu betrachten.

- b) Es sei $B \subseteq C(K)$ nicht gleichgradig stetig. Dann existiert ein $x_0 \in K$, ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, x_i \in K$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Die Folge (x_i) konvergiert gegen x_0

- ii) Für jedes i existiert ein $f \in B$ mit $|f(x_0) - f(x_i)| \geq \varepsilon$.

Es genügt dann, $\mu = \varepsilon_{x_0}$ und $\mu_i = \varepsilon_{x_i}$ zu betrachten.

Für die vorliegende Arbeit sind folgende Definitionen grundlegend:

1.1.7 Definitionen

Für $\mu \in M(K)$, $n \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq C(K)$ sei

$$e_n(B, \mu) = \inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{f \in B} |\mu(f) - \mu_n(f)|.$$

Die Zahl $e_n(B, \mu)$ gibt an, wie gut man μ auf der Menge B ersetzen kann durch eine Quadraturformel mit n Stützstellen.

Gilt für ein $\mu_n \in M_n$ die Beziehung

$$\sup_{f \in B} |\mu(f) - \mu_n(f)| = e_n(B, \mu),$$

so heißt μ_n eine optimale Quadraturformel (mit n Stützstellen bezüglich B und μ).

Wir definieren noch $e_n(B) = \sup_{\|\mu\| \leq 1} e_n(B, \mu)$.

Mit $d_n(B)$ bezeichnen wir die n -te Weite von B im Raum $C(K)$ nach KOLMOGOROV [1]:

$$d_n(B) = \inf_{X_n} \sup_{f \in B} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_{\infty}.$$

Hierbei durchlaufe X_n alle n -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten von $C(K)$. Die Zahl $d_n(B)$ gibt an, wie gut man die Elemente von B gleichmäßig approximieren kann durch Elemente einer n -dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit von $C(K)$.

1.1.8 Bemerkung zur Existenz optimaler Quadraturformeln

Wichtig wären allgemeine Kriterien für die Existenz optimaler Quadraturformeln zu gegebenen μ , B und n . Solche Kriterien sind nicht bekannt, schon für relativ einfache Beispiele ist der Existenzbeweis schwierig. Vergleiche BRASS [1] (Seiten 257 ff.) für weiteren Kommentar und Beispiele.

Zunächst könnte man annehmen, daß für kompaktes $B \subseteq C(K)$ stets optimale Quadraturformeln existieren. Hier gibt es aber einfache Gegenbeispiele, etwa:

$K = [0, 1]$, $\mu = \lambda$, $n = 1$ und $B = \{f | f \in C^2(K), \|f\|_{\infty} \leq 1, \|f'\|_{\infty} \leq 1, \|f''\|_{\infty} \leq 1, f(0) = 0, \lambda(f) := f'(0)\}$.

Dann gilt zwar $e_1(\bar{B}, \lambda) = 0$ (betrachte $\mu_1(f) = i \cdot f(\frac{1}{i})$ für $i \in \mathbb{N}$), aber es gibt kein $\mu_1 \in M_1$ mit $\mu_1(f) = \lambda(f)$ für alle $f \in B$.

1.2 Abschätzung von $e_n(B)$ von oben durch die n-te Weite von B und Folgerungen

Grundlegend ist der sogenannte Interpolationssatz, der z.B. in SHAPIRO [1] bewiesen wird:

1.2.1 Interpolationssatz

Es sei V ein n -dimensionaler Teilraum von $C(K)$ und $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine lineare Abbildung. Dann existieren $x_1, \dots, x_n \in K$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ so, daß gilt:

$$L(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \quad (f \in V)$$

und

$$\|L\| = \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Wir geben einige Folgerungen aus 1.2.1 an:

1.2.2 Satz

a) Ist $V \subseteq C(K)$ ein m -dimensionaler Teilraum, so gilt

$$e_n(V) = 0 \text{ für alle } n \geq m.$$

b) Für beliebige $B \subseteq C(K)$ gilt: $e_{n+1}(B) \leq 2 \cdot d_n(B)$.

c) Ist B symmetrisch (d.h. $x \in B \Rightarrow -x \in B$), so gilt

$$e_n(B) \leq 2 \cdot d_n(B).$$

Beweis:

Zunächst ist a) ein Spezialfall von c). Zum Beweis von b):

Zu gegebenen $B \subseteq C(K)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine lineare Mannigfaltigkeit M der Dimension n mit

$$\sup_{f \in B} \inf_{g \in M} \|f - g\|_{\infty} = d_n(B) + \varepsilon.$$

Es sei $M = f_0 + V$, $\dim V = n$. Für $\tilde{V} = \langle V, f_0 \rangle$ gilt dann

$$\dim \tilde{V} \leq n + 1 \text{ und } \sup_{f \in B} \inf_{g \in \tilde{V}} \|f - g\|_{\infty} \leq d_n(B) + \varepsilon.$$

Ist $\mu \in M(K)$, so existiert ein $\mu_{n+1} \in M_{n+1}$ mit $\|\mu_{n+1}\| \leq \|\mu\|$, welches μ auf $\tilde{V}$ exakt integriert.

$$\text{Hieraus folgt: } \sup_{f \in B} |\mu(f) - \mu_{n+1}(f)| \leq 2\|\mu\| (d_n(B) + \varepsilon)$$

$$\text{Also gilt } e_{n+1}(B, \mu) \leq 2(d_n(B) + \varepsilon).$$

Zum Beweis von c) muß man nur bemerken, daß für symmetrisches B gilt:

$$d_n(B) = \inf_{V_n} \sup_{f \in B} \inf_{g \in V_n} \|f - g\|_{\infty},$$

wobei V_n die Menge der n -dimensionalen Teilräume von $C(K)$ durchläuft (siehe TIHOMIROV [1]).

1.2.3 Bemerkungen

- a) Die Frage, ob $e_n(V) = 0$ auch gelten kann für ein $n < m = \dim V$ wird behandelt in Abschnitt 2.2
- b) Für symmetrische $B \subseteq C(K)$ ist die Abschätzung 1.2.2 c) i.a. bestmöglich. Dies zeigt das folgende Beispiel:

1.2.4 Beispiel

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $m > n$. Es sei $K = \{a_i | i = 1, \dots, n \cdot m\}$ eine Menge mit $n \cdot m$ Elementen, versehen mit der diskreten Topologie.

Wir betrachten $B \subseteq C(K) = \mathbb{R}^{n \cdot m}$, gegeben durch:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n \cdot m} \mid x_1 = \dots = x_m, x_{m+1} = \dots = x_{2m}, \dots, x_{(n-1)m+1} = \dots = x_{nm} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R}^{n \cdot m} \mid |x_i| = 1, \text{ genau } n \text{ der } n \cdot m \text{ } x_i \text{ haben gleiches Vorzeichen} \right\}.$$

Es gilt $d_n(B) = 1$, für $\mu(x) = \frac{1}{n \cdot m} \sum x_i$ gilt:

$$e_n(B) \geq e_n(B, \mu) = 1 + \frac{m-2}{m}.$$

1.2.5 Bemerkung

Wie verändern sich $d_n(\cdot)$ bzw. $e_n(\cdot, \mu)$, wenn man übergeht von einer Menge $B \subseteq C(K)$ zu der Menge $B + V$, wobei V ein m -dimensionaler Vektorraum ist? In dieser Frage unterscheiden sich beide Funktionen: Einerseits gilt in dieser Situation stets $d_n(B+V) \leq d_{n-m}(B)$, andererseits folgt aus $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ nicht einmal $e_n(B+V, \mu) \rightarrow 0$.
(Beispiel: $B = \{f \in C([0,1]) \mid \lambda(f) = 0\}$, $V = \langle f_0 \rangle$ wobei $\lambda f_0 \neq 0$. Dann gilt $e_n(B, \lambda) = 0$ aber $e_n(B+V, \lambda) = e_n(C([0,1], \lambda)$ strebt nicht gegen 0).

Für $e_n(\cdot, \mu)$ gilt aber ein schwächeres Resultat:

1.2.6 Satz

Es sei $B \subseteq C(K)$ beschränkt und $\dim V = m$ wobei $V \cap \{f \mid \|f\| \leq 1\} \subseteq B$. Dann gilt

$$e_n(B+V, \mu) \leq e_{n-m}(B, \mu) + (1+k) \text{ für jedes } \mu \in M(K).$$

Hierbei sei $k = \sup_{f \in B} \|f\|$.

Beweis:

Zu $n-m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $\mu_{n-m} \in M_{n-m}$ mit

$$\sup_{f \in B} |\mu(f) - \mu_{n-m}(f)| \leq e_{n-m}(B, \mu) + \varepsilon.$$

Insbesondere gilt für $\tilde{\mu} = \mu - \mu_{n-m}$:

$$\sup_{\substack{f \in V \\ \|f\|=1}} |\tilde{\mu}(f)| \leq e_{n-m}(B, \mu) + \varepsilon.$$

Nach dem Interpolationssatz existiert ein $\mu' \in M_m$ mit

$$\|\mu'\| \leq e_{n-m}(B, \mu) + \varepsilon, \text{ welches } \tilde{\mu} \text{ auf } V \text{ exakt integriert.}$$

Es gilt dann $\mu' + \mu_{n-m} \in M_n$ und:

$$\sup_{f \in B} |\mu(f) - (\mu' + \mu_{n-m})(f)| \leq (e_{n-m}(B, \mu) + \varepsilon)(1+k).$$

Für $f \in V$ gilt: $\mu(f) - (\mu' + \mu_{n-m})(f) = 0$.

Daher: $e_n(B+V, \mu) \leq (e_{n-m}(B, \mu) + \varepsilon)(1 + k)$.

1.2.7 Folgerung

Wir betrachten die Mengen ${}^1W_p^k(\square[0,1]^s)$ (2.1.1) für $k \cdot p > s$ oder $p = 1$ und $k = s$. Unter diesen Voraussetzungen ist ${}^1W_p^k(\square[0,1]^s)$ eine beschränkte Menge in $C(\square[0,1]^s)$.

Weiter sei $P(k,s)$ der Raum der Polynome vom Grad $< k$ in $\mathbb{R}^s$.

Es gilt $\dim(P(k,s)) = \binom{s+k-1}{k-1} = m$.

Es gilt $P(k,s) \cap \{f \mid \|f\| \leq c_0\} \in {}^1W_p^k(\square[0,1]^s)$ für ein gewisses $c_0 > 0$. (Für $s = 1$ folgt dies etwa aus der Markov'schen Ungleichung.

Da die Ableitungen, als Abbildungen von dem endlichdimensionalen Raum $P(k,s)$ in sich stetig sind, existiert stets ein derartiges c_0).

Es gilt daher:

$$e_n({}^1W_p^k(\square[0,1]^s + P(k,s), \mu) \leq c \cdot e_{n-m}({}^1W_p^k(\square[0,1]^s), \mu)$$

für ein $c > 0$ (unabhängig von $\mu \in M(K)$).

Aus der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung (2.1.1.5, siehe auch 2.1.1.6) folgt dann auch:

$$e_n({}^1W_p^k(\square[0,1]^s), \mu) \leq c \cdot e_{n-m}({}^1W_p^k(\square[0,1]^s), \mu)$$

für ein $c > 0$ unabhängig von $\mu \in M(K)$.

Ganz ähnlich gilt auch:

$$e_n(\tilde{C}^{k,\alpha}(\square[0,1]^s), \mu) \leq c_1 e_{n-m'}(C^{k,\alpha}(\square[0,1]^s), \mu)$$

für ein $c_1 > 0$ unabhängig von $\mu \in M(K)$ und $m' = \dim P(k+1, s)$.

Das hierfür nötige (leicht zu beweisende) Analogon zur verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung lautet:

Ist $f \in \tilde{C}^{k,\alpha}(\square[0,1]^s)$, so existiert ein $c_2 > 0$ (unabhängig von f), so daß ein $g \in P(k+1, s)$ existiert mit:

$$c_2(f - g) \in C^{k,\alpha}(\square[0,1]^s).$$

1.2.8 Beispiel

Für die Klassen $C^{k,\alpha}([0,1]^S)$ bewies BAHVALOV [1]:

$$e_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}} \quad (\text{siehe 1.3.6})$$

TIHOMIROV [1] zeigte:

$$d_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}} \quad (\text{siehe 1.3.4})$$

Daraus folgt mit Satz 1.2.2:

$$e_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}}.$$

Mit 1.2.7 gilt dann auch:

$$e_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}}.$$

Das asymptotische Verhalten von $e_n({}^1W_p^k([0,1]^S))$ ist schwerer zu bestimmen. (Siehe Abschnitt 2.1).

Auch hier gilt wieder: $e_n({}^1\tilde{W}_p^k([0,1]^S)) \asymp e_n({}^1W_p^k([0,1]^S))$.

1.3 Abschätzung der $e_n(B, \mu)$ von unten

1.3.1 Bemerkung

Für $B \subseteq C(K)$ ist bekannt:

a) B ist relativkompakt genau dann, wenn alle $d_n(B)$ endlich sind und $\lim_n d_n(B) = 0$ gilt.

b) B ist von der Form $B \subseteq S + V$ mit kompaktem S und endlich-dimensionalem V genau dann, wenn $\lim_n d_n(B) = 0$ gilt.

(Die Aussage a) wird in PINKUS [1] bewiesen.)

Damit lassen sich also die $B \subseteq C(K)$, für die $d_n(B) \rightarrow 0$ gilt, leicht charakterisieren. Wegen 1.2.2 gilt für solche B auch $e_n(B) \rightarrow 0$.

Es stellen sich folgende Fragen:

a) Gibt es noch andere B mit $e_n(B) \rightarrow 0$?

b) Falls ja, für welche größere Klasse von $B \in C(K)$ gilt

$$e_n(B) \rightarrow 0?$$

c) Wie kann man $e_n(B, \mu)$ von unten her abschätzen?

Diese Fragen werden in diesem und dem nächsten Abschnitt behandelt, allerdings ohne eine vollständige Beantwortung der zweiten Frage.

Die erste Frage wird durch folgendes Beispiel beantwortet:

1.3.2 Beispiel

Es sei $K = [0, 1]$ und $B = \{f \in C(K) \mid \text{Var } f \leq 1\}$. Dann gilt $d_n(B) = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $e_n(B) = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis von $d_n(B) = \frac{1}{2}$:

Sei V eine n -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit von $C(K)$.

Betrachte die Funktionen $f_i(x) = ix$ für $x \in [0, \frac{1}{i}]$ und $f_i(x) = 1$ für alle anderen x . Es gilt $f_i \in B$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Es sei $V' = \{g \in V \mid \|g\|_\infty \leq \inf_{g \in V} \|g\|_\infty + 1\}$. Die Menge V' ist kompakt und daher gleichgradig stetig. Deswegen gilt:

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \inf_{g \in V} \|f_i - g\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} \inf_{g \in V'} \|f_i - g\|_\infty \geq \frac{1}{2} \text{ und damit } d_n(B) \geq \frac{1}{2}.$$

Die Ungleichung $d_n(B) \leq \frac{1}{2}$ ergibt sich mit jedem n -dimensionalen Raum, der die Konstanten enthält.

Beweis von $e_n(B) = \frac{1}{2n}$:

Die Aussage $e_n(B, \lambda) = \frac{1}{2n}$ hat ZUBRZYCKI [1] bewiesen. Den Beweis findet man auch in BRASS [1].

Sei nun $\mu \in M([0, 1])$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Quadraturformel μ_n sei definiert durch $\mu_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{in})$, wobei x_{in} definiert ist durch:

$$x_{in} = \sup \left\{ x \in [0, 1] \mid |\mu|([0, x]) < \frac{1}{2n} + \frac{i-1}{n} \right\}.$$

(Im Fall $\mu = \lambda$ wird hierdurch das Mittelpunktverfahren definiert).

Ähnlich wie im Fall $\mu = \lambda$ zeigt man

$$\sup_{f \in B} |\mu_n(f) - \mu(f)| \leq \frac{1}{2n}, \text{ woraus die Behauptung folgt.}$$

Im folgenden Satz geben wir zwei bekannte Aussagen über die Größen $d_n(B)$ wieder.

1.3.3 Satz

a) (TIHOMIROV [1]) Es sei $B \subseteq C(K)$ die Einheitskugel eines $(n+1)$ -dimensionalen Teilraumes von $C(K)$.

Dann gilt: $d_n(B) = 1$.

b) (TIHOMIROV [1], LORENTZ [2]) Es gelte $x_1, \dots, x_{n+1} \in K$ und für jede Wahl von Vorzeichen $\delta_i \in \{-1, 1\}$ ($i = 1, \dots, n+1$) existiert ein $f \in B$ mit $|f(x_i)| \geq \varepsilon$ und $\operatorname{sgn} f(x_i) = \delta_i$.

Dann gilt: $d_n(B) \geq \varepsilon$.

1.3.4 Bemerkungen

a) Mit Hilfe von 1.3.3.b zeigte TIHOMIROV [1] die Aussage

$$d_n(C^{k, \alpha}([0, 1]^S)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{s}} \text{ wie folgt:}$$

$$\text{Es sei } \varphi(x) = a \prod_{i=1}^s (1 - x_i)^{2(k+\alpha)} \quad \text{für } |x_i| = 1$$

und $\varphi(x) = 0$ sonst.

Für geeignetes $a > 0$ ist dann $\varphi \in C^{k, \alpha}([0, 1]^S)$.

Satz 1.3.3.b wird dann angewendet auf die Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \delta_i \frac{\varepsilon}{a} \varphi((x-x_i) \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k+\alpha}}) \quad (\delta_i \in \{1, -1\}),$$

wobei die x_i paarweise einen Abstand von mindestens

$2 \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{\frac{1}{k+\alpha}}$ haben. Man kann dann n von der Größenordnung $n \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{s}{k+\alpha}}$

nehmen und erhält so das Gewünschte.

b) Um Abschätzungen für die Größen $e_n(B)$ und $e_n(B, \mu)$ zu erhalten, ist es naheliegend, die Voraussetzungen des obigen Satzes anzu-

nehmen und zu prüfen, welche Aussagen daraus über die $e_m(B)$ bzw. $e_m(B, \mu)$ folgen. Wir werden in Abschnitt 2.2 sehen, daß die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 a) und 1.3.3 b) zu schwach sind, um irgendetwas über die $e_m(B)$ auszusagen:
Unter den Voraussetzungen jedes der beiden Sätze ist sogar $e_1(B) = 0$ möglich.

Die Arbeit BAHVALOV [1] enthält eine Methode, um $e_n(B, \mu)$ abzuschätzen:

1.3.5 Satz (nach BAHVALOV [1])

Es sei $B \subseteq C(K)$ und $\mu \in M(K)$. Es gebe $2n$ Funktionen

$f_i (i=1, \dots, 2n)$ mit disjunkten Trägern derart, daß gilt:

$\mu(f_i) \geq \varepsilon$ für alle i und

$\sum_{i=1}^{2n} \delta_i f_i \in B$ für alle Vorzeichenverteilungen $\delta_i \in \{1, -1\}$.

Dann gilt: $e_n(B, \mu) \geq n \cdot \varepsilon$.

Beweis:

Es sei $\mu_n \in M_n$, $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$. Dann gilt für mindestens n der Funktionen $f_1, \dots, f_{2n}$:

$\mu_n(f_i) = 0 \quad (i \in A, |A| \geq n).$

Sei $g_1 = \sum_{i=1}^{2n} f_i$ und $g_2 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i f_i$ mit $\delta_i = -1$ genau dann, wenn $i \in A$.

Dann gilt $\mu_n(g_1) = \mu_n(g_2)$ aber $|\mu(g_1) - \mu(g_2)| \geq 2n\varepsilon$.

Hieraus folgt $\sup_{g \in B} |\mu(g) - \mu_n(g)| = n \cdot \varepsilon$ und damit die Behauptung.

1.3.6 Bemerkung

Mit Hilfe des Arguments von 1.3.5 zeigt BAHVALOV [1] die Aussage

$$e_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}}.$$

Dazu benützt er wieder die (sogenannten Vitushkin-) Funktionen aus 1.3.4 a). Auf die gleiche Weise wird in Abschnitt 2.1 die GröÙe e_n für die Mengen $W_p^k([0,1]^S)$ von unten her abgeschätzt.

Wir geben eine weitere Abschätzung von $e_n(B, \mu)$ an:

1.3.7. Satz

Es sei $B \subseteq C(K)$ und $\mu \in M(K)$. Dann gilt:

$$e_n(B, \mu) \geq \inf_{x \in K^n} \sup \left\{ \frac{1}{2} |\mu(f) - \mu(\tilde{f})|, \text{ wobei } f, \tilde{f} \in B \text{ mit } f(x_i) = \tilde{f}(x_i) \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Beweis:

Sei $\mu_n \in M_n$, $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$. Dann gilt $\mu_n(f) = \mu_n(\tilde{f})$, falls $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Hieraus folgt der Satz.

1.3.8. Bemerkung

Die einfache Abschätzung 1.3.7 ist eine Verallgemeinerung von 1.3.5. Satz 1.3.7 ist enthalten in der "Theorie der optimalen Algorithmen", wie sie von TRAUB, WOŹNIAKOWSKI [1] dargestellt wird.

Der Ausdruck $\inf_{x \in K^n} \sup \left\{ \frac{1}{2} |\mu(f) - \mu(\tilde{f})|; f, \tilde{f} \in B, f(x_i) = \tilde{f}(x_i) \right\}$

auf der rechten Seite der Abschätzung 1.3.7 hat folgende Bedeutung:

Läßt man auch nichtlineare Quadraturformeln $Q(f) = \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$ mit einer beliebigen Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu, so gibt dieser Ausdruck gerade den minimalen Fehler so einer (verallgemeinerten) Quadraturformel, die n Funktionswerte benützt, an.

nehmen und zu prüfen, welche Aussagen daraus über die $e_m(B)$ bzw. $e_m(B, \mu)$ folgen. Wir werden in Abschnitt 2.2 sehen, daß die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 a) und 1.3.3 b) zu schwach sind, um irgendetwas über die $e_m(B)$ auszusagen:
Unter den Voraussetzungen jedes der beiden Sätze ist sogar $e_1(B) = 0$ möglich.

Die Arbeit BAHVALOV [1] enthält eine Methode, um $e_n(B, \mu)$ abzuschätzen:

1.3.5 Satz (nach BAHVALOV [1])

Es sei $B \subseteq C(K)$ und $\mu \in M(K)$. Es gebe $2n$ Funktionen $f_i (i=1, \dots, 2n)$ mit disjunkten Trägern derart, daß gilt:

$$\mu(f_i) \geq \varepsilon \text{ für alle } i \text{ und} \\ \sum_{i=1}^{2n} \delta_i f_i \in B \text{ für alle Vorzeichenverteilungen } \delta_i \in \{1, -1\}.$$

Dann gilt: $e_n(B, \mu) \geq n \cdot \varepsilon$.

Beweis:

Es sei $\mu_n \in M_n$, $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$. Dann gilt für mindestens n der Funktionen $f_1, \dots, f_{2n}$:

$$\mu_n(f_i) = 0 \quad (i \in A, |A| \geq n).$$

Sei $g_1 = \sum_{i=1}^{2n} f_i$ und $g_2 = \sum_{i=1}^{2n} \delta_i f_i$ mit $\delta_i = -1$ genau dann, wenn $i \in A$.

Dann gilt $\mu_n(g_1) = \mu_n(g_2)$ aber $|\mu(g_1) - \mu(g_2)| \geq 2n\varepsilon$.

Hieraus folgt $\sup_{g \in B} |\mu(g) - \mu_n(g)| = n\varepsilon$ und damit die Behauptung.

1.3.6 Bemerkung

Mit Hilfe des Arguments von 1.3.5 zeigt BAHVALOV [1] die Aussage

$$e_n(c^{k,\alpha}([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}}.$$

Dazu benützt er wieder die (sogenannten Vitushkin-) Funktionen aus 1.3.4 a). Auf die gleiche Weise wird in Abschnitt 2.1 die Größe e_n für die Mengen ${}^1W_p^k([0,1]^S)$ von unten her abgeschätzt.

Wir geben eine weitere Abschätzung von $e_n(B, \mu)$ an:

1.3.7 Satz

Es sei $B \subseteq C(K)$ und $\mu \in M(K)$. Dann gilt:

$$e_n(B, \mu) \geq \inf_{x \in K^n} \sup \left\{ \frac{1}{2} |\mu(f) - \mu(\tilde{f})|, \text{ wobei} \right. \\ \left. f, \tilde{f} \in B \text{ mit } f(x_i) = \tilde{f}(x_i) \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Beweis:

Sei $\mu_n \in M_n$, $\mu_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$. Dann gilt $\mu_n(f) = \mu_n(\tilde{f})$, falls $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ für $i = 1, \dots, n$.

Hieraus folgt der Satz.

1.3.8 Bemerkung

Die einfache Abschätzung 1.3.7 ist eine Verallgemeinerung von 1.3.5. Satz 1.3.7 ist enthalten in der "Theorie der optimalen Algorithmen", wie sie von TRAUB, WOŹNIAKOWSKI [1] dargestellt wird.

Der Ausdruck $\inf_{x \in K^n} \sup \left\{ \frac{1}{2} |\mu(f) - \mu(\tilde{f})|; f, \tilde{f} \in B, f(x_i) = \tilde{f}(x_i) \right\}$

auf der rechten Seite der Abschätzung 1.3.7 hat folgende Bedeutung:

Läßt man auch nichtlineare Quadraturformeln $Q(f) = \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$ mit einer beliebigen Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu, so gibt dieser Ausdruck gerade den minimalen Fehler so einer (verallgemeinerten) Quadraturformel, die n Funktionswerte benützt, an.

So eine "optimale Quadraturformel" für gegebene Stützstellen $x_1, \dots, x_n$ ist:

$$Q(f) = \frac{1}{2} \sup \{ \mu(\tilde{f}) \mid \tilde{f} \in B, \tilde{f}(x_i) = f(x_i) \} + \\ + \frac{1}{2} \inf \{ \mu(\tilde{f}) \mid \tilde{f} \in B, \tilde{f}(x_i) = f(x_i) \}.$$

Interessant ist der folgende Satz von SMOLYAK (aus der unveröffentlichten Dissertation. Einen Beweis findet man in BAHVALOV [2] oder in TRAUB, WOZNIAKOWSKI [1]), der besagt, daß für symmetrische, konvexe B nichtlineare Quadraturformeln nicht besser sind als lineare:

1.3.9 Satz (SMOLYAK)

Ist $B \subseteq C(K)$ konvex und symmetrisch (d.h. aus $x \in B$ folgt $-x \in B$), so gilt in 1.3.7 sogar Gleichheit.

Die Gleichung kann man dann auch so schreiben:

$$e_n(B, \mu) = \inf_{x \in K^n} \left\{ \sup \mu(f) \mid f \in B, f(x_i) = 0 \ (i = 1, \dots, n) \right\}.$$

1.3.10 Bemerkung

In dem Buch TRAUB, WOZNIAKOWSKI [1] findet man (auf den Seiten 118-120) einen Zusammenhang zwischen $e_n(B, \mu)$ und den n-ten Weiten von B in $L^1(K, \mu)$ im Sinne von Gelfand. Da dieser Zusammenhang nur für recht spezielle B gilt, gehen wir hierauf nicht näher ein.

1.4 Zu dem Problem $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ bzw. $e_n(B) \rightarrow 0$

1.4.1 Bemerkung

Will man Aussagen machen über diejenigen $B \in C(K)$, für die $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ gilt, so stößt man auf die in $L_1(K, \mu)$ relativkompakten Mengen.

So ist die Menge $B = \{ f \in C([0,1]) \mid \text{Var } f \leq 1 \}$ (Siehe Beispiel 1.3.2) bis auf einen eindimensionalen Raum relativkompakt in $L_1(K, \mu)$ für jedes μ . Wir werden jedoch sehen, daß der Zusammenhang zwischen Mengen mit $e_n(B) \rightarrow 0$ bzw. $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ und solchen, die relativkompakt sind in gewissen $L_1(K, \mu)$, nicht sehr eng ist.

Die genaue topologische Beschreibung derjenigen B , für die $e_n(B) \rightarrow 0$ bzw. $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ gilt, scheint viel schwieriger zu sein, als die entsprechende Frage für $d_n(B)$ (Vergleiche 1.3.1).

Wir geben einige Beispiele an:

1.4.2 Beispiel

Es sei K abzählbar, $K = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Jedes Maß μ auf K hat dann die Gestalt $\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i)$ (mit $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty$). Es sei $B = \{ f \in C(K) \mid \|f\| \leq 1 \}$ die Einheitskugel in $C(K)$. Dann gilt: B ist relativkompakt in $L_1(K, \mu)$ für jedes $\mu \in M(K)$, es gilt auch $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ für jedes μ . Die Aussage $e_n(B) \rightarrow 0$ ist aber falsch.

1.4.3 Beispiel

Wir werden in Abschnitt 2.2 sehen, daß es z.B. in $C([0,1])$ einen unendlichdimensionalen Vektorraum V gibt mit $e_1(V) = 0$, d.h. insbesondere $e_n(V) \rightarrow 0$. Es gibt also Mengen mit $e_n(B) \rightarrow 0$, die nicht (auch nicht bis auf einen endlichdimensionalen Teilraum) relativkompakt sind in $L_1(K, \mu)$ für gewisse $\mu \in M(K)$.

1.4.4 Beispiel

Auch die Aussage: Ist B relativkompakt in $L_1(K, \mu)$, so gilt $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ ist i.a. falsch. Als Gegenbeispiel kann man wählen:

$K = [0,1]$, $\mu = \lambda$ und $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, wobei B_i besteht aus der Menge der Funktionen f , die sich als Summe von i Funktionen der Gestalt

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x - x_0| \cdot 10^i & \text{für } |x - x_0| \leq 10^{-i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

schreiben lassen.

(Denn: $\bigcup_{i=1}^m B_i$ ist gleichgradig stetig und beschränkt, also relativkompakt in $C([0,1])$, also auch in $L_1([0,1], \lambda)$).

Weiter gilt für $f \in B \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i$: $\int |f| d\lambda \leq (m+1) \cdot 10^{-(m+1)}$.)

1.4.5 Problem

Durch die aufgeführten Beispiele wird folgende Frage nicht beantwortet:

Es sei $B \subseteq C(K)$ relativkompakt in allen $L_1(K, \mu)$.

Gilt dann $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$ für jedes μ ?

1.4.6 Satz

Es sei $B \subseteq C(K)$ relativkompakt in $L_1(K, \mu)$ und es sei μ atomar.

Dann gilt $e_n(B, \mu) \rightarrow 0$.

Beweis:

Das Maß μ ist dann von der Form $\mu(f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f(x_i)$.

Zu $\varepsilon > 0$ existieren $f_1, \dots, f_r$ mit $\bigwedge_{g \in B} \bigvee_{i=1}^r \|g - f_i\|_1 \leq \varepsilon$.

Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mu_{n_0}(g) = \sum_{i=1}^{n_0} a_i g(x_i)$ die Aussage

$|\mu_{n_0}(f_i) - \mu(f_i)| \leq \varepsilon$ für $i = 1, \dots, r$ erfüllt. Dann gilt

für alle $g \in B$:

$$\begin{aligned} |\mu_{n_0}(g) - \mu(g)| &\leq |\mu_{n_0}(g) - \mu_{n_0}(f_i)| + |\mu_{n_0}(f_i) - \mu(f_i)| + \\ &+ |\mu(f_i) - \mu(g)| \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $e_{n_0}(B, \mu) \leq 3\varepsilon$.

Kapitel 2

Die n-te untere Fehlergrenze von Quadraturverfahren für spezielle Funktionenklassen

2.1 Die Größen $e_n(B, \mu)$ und $e_n(B)$ für die Einheitskugeln von Sobolev-Räumen

Ist $V \subseteq C(K)$ ein Teilvektorraum, der mit einer Norm versehen ist und $B \subseteq V$ die Einheitskugel bezüglich dieser Norm, so gilt

$$e_n(B, \mu) = \inf_{\mu_n \in M_n} \|\mu_n - \mu\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm im Raum V' bedeute. Die Größe $e_n(B, \mu)$ gibt dann also an, wie gut man $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ approximieren kann (bezüglich der Norm von V') durch Elemente aus M_n .

Wir betrachten in diesem Abschnitt den Fall, daß V ein Sobolev-Raum ist, der in $C([0,1]^S)$ eingebettet ist und untersuchen für diesen Fall das asymptotische Verhalten von $e_n(B, \lambda^S)$ und $e_n(B)$.

2.1.1 Einige grundlegende Tatsachen über Sobolev-Räume

2.1.1.1 Definition der Sobolev-Räume

Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann sei $W_p^k([0,1]^S)$ die Menge aller Äquivalenzklassen $\tilde{f}$ von Funktionen $f : [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$ (dabei heißen zwei Funktionen äquivalent, wenn sie sich nur auf einer λ^S -Nullmenge unterscheiden), für die gilt:

Sowohl $\tilde{f}$, als auch alle Ableitungen $D^\alpha \tilde{f}$ bis zur Ordnung $|\alpha| = k$ liegen in $L_p([0,1]^S, \lambda^S)$.

Versehen mit der Norm $\|\tilde{f}\|_{k,p} = \|\tilde{f}\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha \tilde{f}\|_p$ ist

$W_p^k([0,1]^S)$ ein Banach-Raum.

2.1.1.2 Bemerkungen

- a) Häufig betrachtet man auf $W_p^k([0,1]^s)$ auch die äquivalente Norm $\|\tilde{f}\|_{k,p}' = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p$.
- b) Da die Elemente von W_p^k keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen sind, hat ein Ausdruck der Gestalt $\mu(f)$ mit $f \in W_p^k$ und einem Maß μ im allgemeinen gar keinen Sinn.
- c) Viele Informationen über die Sobolev-Räume findet man in KUFNER et al. [1].
- d) Mit ${}^1W_p^k([0,1]^s)$ werde die Einheitskugel von $W_p^k([0,1]^s)$ bezeichnet.

2.1.1.3 Satz

(Einbettungssatz von Sobolev. S. SOBOLEV [1] oder KUFNER et al. [1]).

Es sei $kp > s$ oder $p = 1$ und $k = s$. Dann gilt: Jedes $\tilde{f} \in W_p^k([0,1]^s)$ enthält eine stetige Funktion f .

Überdies gibt es ein $c > 0$ mit $\|f\|_\infty \leq c \|\tilde{f}\|_{k,p}$.

2.1.1.4 Bemerkung

Unter den Voraussetzungen des Einbettungssatzes identifizieren wir $\tilde{f} \in W_p^k([0,1]^s)$ mit der stetigen Funktion $f \in \tilde{f}$. In diesem Sinne gilt dann $W_p^k([0,1]^s) \subseteq C([0,1]^s)$ und der Ausdruck $\mu(f)$ hat für beliebige $\mu \in M([0,1]^s)$ und $f \in W_p^k([0,1]^s)$ eine Bedeutung.

2.1.1.5 Satz (Verallgemeinerte Poincaré-Ungleichung)

Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $c > 0$ derart, daß für jedes $f \in W_p^k([0,1]^s)$ ein Polynom $g \in P(k,s)$ existiert, so daß gilt:

$$\|f - g\|_p = c \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p.$$

2.1.1.6 Bemerkungen

a) Poincaré behandelte den Fall $s = 1$, $p = 2$. Der allgemeine Fall dürfte von Sobolev stammen. Siehe SOBOLEV [1], vergleiche auch DAHMEN et al. [1] und SHAPIRO [2].

b) Wegen $\|f - g\|_{k,p} = \|f - g\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha(f - g)\|_p = \|f - g\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p$ (für $g \in P(k,s)$), hätte man in 2.1.1.5 auch $\|f - g\|_{k,p}$ statt $\|f - g\|_p$ schreiben können.

2.1.1.7 Satz

Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \cdot p > s$ oder $p = 1$ und $k = s$. Dann existiert ein $c > 0$, so daß für jedes $f \in W_p^k([a,b]^s)$ ein $g \in P(k,s)$ existiert mit

$$\begin{aligned} \|f - g\|_\infty &\leq c(b-a)^{k-\frac{s}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p \\ &\leq c(b-a)^{k-\frac{s}{p}} \|f\|_{k,p}. \end{aligned}$$

Beweis:

Die zweite Ungleichung ist trivial, wir zeigen die erste:

Für $a = 0$ und $b = 1$ folgt die Existenz eines derartigen $c > 0$ aus der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung zusammen mit dem Einbettungssatz:

$$\|f - g\|_\infty \leq c_1 \cdot \|f - g\|_{k,p} = c \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p.$$

Seien nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ beliebig. Zu $f \in W_p^k([a,b]^s)$, betrachten wir die Funktion $f' \in W_p^k([0,1]^s)$, die definiert ist durch

$f'(x_1, \dots, x_s) = f(a + (b-a)x_1, \dots, a + (b-a)x_s)$. Dann gilt

$$\|f'\|_\infty = \|f\|_\infty \quad \text{und} \quad D^\alpha f'(x_1, \dots, x_s) = (b-a)^k \cdot D^\alpha f(a + (b-a)x_1, \dots, a + (b-a)x_s) \quad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| = k.$$

Hieraus folgt $\|D^\alpha f'\|_p = (b-a)^{k-\frac{s}{p}} \|D^\alpha f\|_p$.

Zu f' existiert ein Polynom $g' \in P(k, s)$ mit

$$\|f' - g'\|_{\infty} \leq c \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f'\|_p.$$

Für das entsprechende Polynom $g \in P(k, s)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{\infty} &= \|f' - g'\|_{\infty} \leq c \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f'\|_p = \\ &= c(b-a)^{k-\frac{s}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f\|_p. \end{aligned}$$

2.1.1.8 Folgerung

Es sei $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ und $kp > s$ oder $p = 1$ und $k = s$.

Dann existiert ein $c > 0$, so daß für jedes Maß $\tilde{\mu} \in M(\square_{a,b}^s)$, welches $\tilde{\mu}(g) = 0$ für alle $g \in P(k, s)$ erfüllt, gilt:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mu}(f)| &\leq \|\tilde{\mu}\| \cdot c \cdot (b-a)^{k-\frac{s}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f\|_p \\ (f &\in W_p^k(\square_{a,b}^s)). \end{aligned}$$

Weiter gilt für beliebiges $\mu \in M(\square_{a,b}^s)$ und für

$$n = \binom{s+k-1}{k-1} = \dim(P(k, s)):$$

$$e_n(1_{W_p^k(\square_{a,b}^s)}, \mu) \leq 2 \cdot c \cdot \|\mu\| \cdot (b-a)^{k-\frac{s}{p}}.$$

Beweis:

Die erste Behauptung folgt aus 2.1.1.7:

$\tilde{\mu}(f) = \tilde{\mu}(f - g)$ für alle $g \in P(k, s)$. Daher:

$$|\tilde{\mu}(f)| = |\tilde{\mu}(f - g)| \leq \|\tilde{\mu}\| \cdot \|f - g\|_{\infty} \leq c(b-a)^{k-\frac{s}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f\|_p \cdot \|\mu\|.$$

Sei nun $\mu \in M(\square_{a,b}^s)$ beliebig. Nach dem Interpolationssatz 1.2.1 existiert ein $\mu_n \in M_n(\square_{a,b}^s)$ mit $\|\mu_n\| \leq \|\mu\|$ und $\mu_n = \mu$ auf $P(k, s)$.

Die zweite Behauptung folgt dann, wenn man die erste auf das Maß $\mu - \mu_n$ anwendet.

2.1.1.9 Bemerkungen zum Fall $s = 1$

Den Satz 2.1.1.7 und seine Folgerung 2.1.1.8 zeigt man für $s = 1$ am einfachsten mit dem Satz von Taylor.

Für $f \in W_p^s([a, b])$ gilt:

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{1}{2} f''(a)(x - a)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k-1)}(a)(x - a)^{k-1} + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x - t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt.$$

Daher gilt, wenn g das Taylor Polynom zu f ist:

$$|f(x) - g(x)| = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^x (x - t)^{k-1} f^{(k)}(t) dt \leq \\ \leq \frac{1}{(k-1)!} \cdot \| (b - t)^{k-1} \|_q \cdot \| f^{(k)} \|_p$$

(wobei $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ und die Ungleichung von Hölder benutzt wird).

Hieraus folgt $\|f - g\|_\infty \leq c \cdot (b - a)^{k - \frac{1}{p}} \cdot \|f^{(k)}\|_p$, also 2.1.1.7.

Hieraus folgt wieder 2.1.1.8.

Die Aussage 2.1.1.8 folgt aber auch aus den bekannten Restglieddarstellungen von Quadraturformeln (Satz von Peano, siehe etwa BRASS [1] und BÖHMER [1]). Über die Problematik von Integraldarstellungen des Restes (analog zum Satz von Peano für $s = 1$) im Fall $s > 1$ vergleiche SHAPIRO [2].

Bei der Behauptung $e_n(1_{W_p^k}([a, b]^s), \mu) \leq 2c \| \mu \| \cdot (b - a)^{k - \frac{s}{p}}$ machen wir keine Aussage darüber, wie klein man c wählen kann. Besonders für $s = 1$ und $\mu = \lambda^1$ sind Abschätzungen bekannt. Vergleiche dazu BRASS [1] und BRASS, SCHMEISSER [1]. Eine einfache Abschätzung (im Fall $s = 1$) liefert natürlich der Satz von Taylor in Verbindung mit dem Interpolationssatz.

2.1.2 Über die n-ten Weiten der Einheitskugeln von Sobolev-Räumen

2.1.2.1 Satz

Es sei $pk > s$, im Falle $p > 2$ gelte zusätzlich $2k > s$.

Dann gilt:

$$d_n({}^1W_p^k([0,1]^s)) \asymp \begin{cases} n^{-\frac{k}{s}} & \text{für } p \geq 2 \\ n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}} & \text{für } p \leq 2. \end{cases}$$

2.1.2.2 Bemerkungen

a) Dieser Satz wurde bewiesen von KASHIN [1] (siehe auch KASHIN [2] und HÖLLIG [1]), nachdem viele Spezialfälle des Satzes vorher schon bewiesen wurden. Eine kurze Geschichte des Satzes und weitere Literaturangaben findet man in SCHUMAKER [1].

Im Fall $2 < p \leq \infty$ und $\frac{s}{p} < k \leq \frac{s}{2}$ wird das asymptotische Verhalten der d_n durch Satz 2.1.2.1 noch offengelassen. In der Arbeit LUBITZ [1] konnte diese Lücke bis auf einen logarithmischen Faktor geschlossen werden.

b) Mit Hilfe der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung (2.1.1.5) zeigt man leicht, daß dieselbe Aussage auch für die Mengen

$$\tilde{W}_p^k([0,1]^s) \text{ anstelle von } {}^1W_p^k([0,1]^s) \text{ gilt.}$$

c) Lange bekannt ist die schwächere Aussage

$$n^{-\frac{k}{s}} < d_n({}^1W_p^k([0,1]^s)) < n^{-\frac{k}{s} + \frac{1}{p}}, \text{ wobei die rechte Seite aus}$$

den klassischen Approximationsverfahren (Approximation durch Polynome oder Splines) folgt. Wir beweisen die linke Seite, weil wir in 2.1.3.2 ganz ähnlich die Größe $e_n({}^1W_p^k([0,1]^s))$ von unten her abschätzen werden.

Beweis:

Aus der ersten Abschätzung folgt die zweite, wir beweisen die erste. Betrachte wieder die g_j ($j = 1, \dots, m^s$) und die $h \in {}^1W_p^k(\square_{[0,1]}^s)$ aus dem Beweis von 2.1.2.3.

Es gilt $\lambda^s(g_j) = cm^{-s-k}$. Daher folgt nach Satz 1.3.5:

$$e_{\frac{1}{2}m^s}({}^1W_p^k(\square_{[0,1]}^s), \lambda^s) \geq cm^{-s-k} \cdot m^s.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

2.1.3.3 Bemerkung

Wir wollen nun $e_n({}^1W_p^k(\square_{[0,1]}^s))$ von oben her abschätzen. Wichtig hierfür sind:

- i) Satz 2.1.1.7 bzw. die Folgerung 2.1.1.8
- ii) die Ungleichung 2.1.3.4, die wir als Nächstes zeigen
- iii) ein Verfahren zur Zerlegung von Maßen $\mu \in M(\square_{[0,1]}^s)$,
siehe Satz 2.1.3.11.

Dazu brauchen wir noch den Interpolationssatz 1.2.1 und die bekannte Ungleichung 2.1.3.5.

Da der Beweis für das Lebesgue-Maß λ^s und für den Fall $s = 1$ viel einfacher sind als für den allgemeinen Fall, werden diese Fälle zunächst gesondert bewiesen (2.1.3.6 bzw. 2.1.3.9). Für das Lebesgue-Maß läßt sich noch die stärkere Aussage 2.1.3.8 beweisen. Der allgemeine Fall wird dann in 2.1.3.10 mit Hilfe des Zerlegungssatzes 2.1.3.11 bewiesen.

2.1.3.4 Satz

Es sei (Ω, B, m) ein Maßraum und $f_i \in L_p(\Omega, m)$ für $i = 1, \dots, n$. Für beliebige $x \in \Omega$ und i, j gelte $f_i(x) \cdot f_j(x) \geq 0$. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p \leq n^{1-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_p.$$

Wir bemerken noch, daß unter denselben Voraussetzungen an die f_i im Falle $f_i \in W_p^k([0,1]^S)$ folgt:

$$\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{k,p} \leq n^{1-\frac{1}{p}} \left\| \sum_{i=1}^n f_i \right\|_{k,p}.$$

Beweis:

$\left\| \sum f_i \right\|_p = \left(\int \left| \sum f_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Nach Voraussetzung an die f_i und wegen der Ungleichung $\sum a_i^p \leq \left(\sum a_i \right)^p$ (für $a_i \geq 0$, $1 \leq p < \infty$) gilt weiter:

$$\left\| \sum f_i \right\|_p \leq \left(\int \sum |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum \int |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Andererseits gilt: $\sum \|f_i\|_p = \sum \left(\int |f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Die Behauptung folgt daher aus der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p}} \leq n^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{p}}$$

(wobei $a_i \geq 0$).

Diese Ungleichung ist äquivalent zu der bekannten Ungleichung (etwa MITRINOVIC [1], S. 76):

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(setze $b_i = a_i^{\frac{1}{p}}$). Die entsprechende Ungleichung für die k, p -Normen folgt leicht aus der soeben bewiesenen.

2.1.3.5 Hilfssatz

Es gelte $x, y, \alpha, \beta > 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{\alpha+\beta} (\alpha x + \beta y) \geq (x^\alpha y^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Beweis:

Siehe MITRINOVIC [1], S. 30.

2.1.3.6 Satz

Es gelte $kp > s$ oder $p = 1$ und $k = s$. Dann gilt:

$$e_n(1\tilde{W}_p^k([0,1]^s), \lambda^s) \prec n^{-\frac{k}{s}}.$$

Beweis:

Zerlege für $m \in \mathbb{N}$ den Würfel $[0,1]^s$ in m^s kleine Würfel mit Seitenlänge $\frac{1}{m}$.

Betrachte auf jedem der kleinen Würfel eine Quadraturformel mit $\binom{s+k-1}{k-1}$ Stützstellen und Norm $(\frac{1}{m})^s$, die alle Polynome aus $P(k,s)$ exakt integriert. Wegen dem Interpolationssatz existiert so eine Formel.

Es sei $\mu_n \in M_n$ die Summe dieser m^s Quadraturformeln.

Dann gilt: $n = \binom{s+k-1}{k-1} \cdot m^s$. Für den Fehler auf jedem Teilwürfel gilt nach 2.1.1.8:

$$|F_i| \leq c \frac{1}{m^s} \left(\frac{1}{m}\right)^{k-\frac{s}{p}} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^{(i)}$$

Dabei sei $\|\cdot\|_p^{(i)}$ die p -Norm der auf den entsprechenden Teilwürfeln eingeschränkten Funktion.

Für den Gesamtfehler folgt dann mit 2.1.3.4:

$$\begin{aligned} |F| &\leq c m^{-s-k+\frac{s}{p}} \cdot \sum_i \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^{(i)} \leq c m^{-s-k+\frac{s}{p}} \cdot m^{s-\frac{s}{p}} \cdot \\ &\cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p = c m^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

2.1.3.7 Bemerkungen

- a) Aus 2.1.3.2 und 2.1.3.6 folgt $e_n(1\tilde{W}_p^k([0,1]^s, \lambda^s) \prec n^{-\frac{k}{s}}$
(falls $kp > s$ oder $p = 1$ und $k = s$). Diese Aussage ist für den Fall $s = 1$ längst bekannt und eine einfache Konsequenz

der Restglieddarstellung von Peano.

Die Arbeit SOBOLEV [2] behandelt den Fall $p = 2$ für beliebige s (wobei auch hier wieder die Einbettungsbedingung $2k > s$ erfüllt sein muß) und beweist obige Aussage für diesen Spezialfall. Die Abschätzung von unten wird (ebenso wie bei 2.1.3.2) mit Hilfe der Methode von BAHVALOV [1] gezeigt. Die Abschätzung von oben wird dagegen mit Hilbertraum-Methoden bewiesen, die nur im Falle $p = 2$ anwendbar sind. (Eine Einführung in diese Methoden bietet HABER [1]).

Satz 2.1.3.6 wird bewiesen in der Arbeit POLOVINKIN [1] (mit der kleinen Einschränkung $p \neq 1$ und $p \neq \infty$). Wie dort gezeigt wird, gilt der Satz nicht nur für $[0,1]^s$, sondern auch für viel allgemeinere Gebiete im $\mathbb{R}^s$. Benutzt wird dabei die Tatsache, daß die Räume $W_p^k(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv sind. Die Ergebnisse von POLOVINKIN [1] werden in den Arbeiten BESOV [1] und BESOV [2] weiter verallgemeinert.

- b) Für den hier behandelten Fall des Lebesgue-Maßes kann man eine stärkere Aussage beweisen:

2.1.3.8 Satz

Es sei $kp > s$ oder $p = 1$ und $k = s$. Dann existiert der folgende Grenzwert:

$$\lim_n n^{\frac{k}{s}} \cdot e_n(\tilde{W}_p^k([0,1]^s), \lambda^s).$$

Dieser Satz ist für $s = 1$ bekannt. Für diesen Fall sind sogar die entsprechenden Grenzwerte und dazugehörige Quadraturverfahren bekannt. Vergleiche dazu die Arbeiten LEVIN, GIRSHOVICH [1], STRAUSS [1] und ZHENSYKBAEV [2], [3], [4]. Die Beweise in diesen Arbeiten benützen

wesentlich den Zusammenhang zwischen Quadraturformeln und Monosplines und lassen sich nicht auf den Fall $s > 1$ übertragen.

Beweis des Satzes:

Es sei $h(n) = n^{\frac{k}{s}} \cdot e_n(1\tilde{w}_p^k([0,1]^s), \lambda^s)$.

Dann existiert $\inf_{n \in \mathbb{N}} h(n) = c$. Wir behaupten: $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = c$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $c \leq h(n_0) \leq c + \varepsilon$.

Betrachte zu $m \in \mathbb{N}$ die Zahl $h(n_0 \cdot m^s)$. Mit Hilfe der entsprechenden zusammengesetzten Quadraturformel sieht man:

Gilt für μ_{n_0} die Aussage

$$|\mu_{n_0}(f) - \lambda^s(f)| \leq (c + \varepsilon) n_0^{-\frac{k}{s}} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p, \text{ so gilt für}$$

die auf den Würfel $[0, \frac{1}{m}]^s$ transformierte Formel:

$$|\tilde{\mu}_{n_0}(f) - \lambda^s(f)| \leq m^{-s}(c + \varepsilon) n_0^{-\frac{k}{s}} \left(\frac{1}{m}\right)^{k - \frac{s}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p$$

(Argument wie bei 2.1.1.7 bzw. 2.1.1.8).

Summation über die m^s Teilwürfel ergibt unter Berücksichtigung von Ungleichung 2.1.3.4:

$$|\mu_{n_0 m^s}(f) - \lambda^s(f)| \leq m^{-s-k+\frac{s}{p}} (c + \varepsilon) n_0^{-\frac{k}{s}} \cdot m^{s-\frac{s}{p}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p = (n_0 m^s)^{-\frac{k}{s}} (c + \varepsilon) \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p.$$

Hieraus folgt: $h(n_0 m^s) \leq c + \varepsilon$.

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so schreiben wir n in der Form

$$n = n_0 m^s + n_1 \quad (n_1 \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0) \text{ mit möglichst großem } m.$$

Es gilt dann $n < n_0(m+1)^s$.

$$\text{Wegen } e_n(1\tilde{w}_p^k([0,1]^s), \lambda^s) \leq e_{n_0 m^s}(1\tilde{w}_p^k([0,1]^s), \lambda^s)$$

$$\leq (\varepsilon + c) : (n_0 m^s)^{\frac{k}{s}} \text{ gilt daher:}$$

$$h(n) = n^{\frac{k}{s}} \cdot e_n(1_{\tilde{W}_p^k}([0,1]^s), \lambda^s) \leq (\varepsilon + c) n^{\frac{k}{s}} : (n_0 m^s)^{\frac{k}{s}} < \\ < (\varepsilon + c) \frac{(m+1)^k}{m^k} < c + 2\varepsilon, \text{ falls } n \text{ genügend groß ist.}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

2.1.3.9 Satz

Es sei $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$e_n(1_{\tilde{W}_p^k}([0,1])) \prec n^{-k}.$$

Beweis:

Man könnte vorgehen wie bei Satz 2.1.3.6, das Intervall $[0,1]$ in gleichgroße Teilintervalle zerlegen und entsprechende zusammengesetzte Quadraturformeln betrachten. Dieses Verfahren würde aber nur zu der Abschätzung $e_n(1_{\tilde{W}_p^k}([0,1])) \prec n^{-k + \frac{1}{p}}$ führen.

Die geschilderte Methode führt aber zum Ziel, wenn man in geeignet lange, i.a. verschieden große Teilintervalle zerlegt:

Es sei $\mu \in M([0,1])$ mit $\|\mu\| \leq 1$ und $m \in \mathbb{N}$.

Wir zerlegen $[0,1]$ in m Teilintervalle mit Länge a_i , das Maß μ in Maße μ_i mit Träger im jeweiligen Intervall, so daß gilt:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m \|\mu_i\| = \|\mu\| \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m \mu_i = \mu.$$

Nach dem Interpolationssatz (1.2.1) existiert auf jedem Teilintervall eine Quadraturformel, die höchstens $k = \dim P_k$ Stützstellen benützt und alle $g \in P_k$ exakt (bezüglich μ_i) integriert und deren Norm höchstens $\|\mu_i\|$ beträgt.

Für den Fehler auf dem i -ten Teilintervall gilt nach 2.1.1.8:

$$|F_i| = 2\|\mu_i\| \cdot c \cdot a_i^{k - \frac{1}{p}} \|D^{k_f}\|_p^{(i)}.$$

Wir wählen nun alle Intervalle und die μ_i gerade so, daß alle $b_i = \|\mu_i\| \cdot a_i^{k - \frac{1}{p}}$ gleich groß sind.

(Aus Stetigkeitsgründen ist dies immer möglich, außer wenn μ atomar ist mit weniger als m Atomen - dieser Fall aber ist trivial).

Aus $b_i = \|\mu_i\| \cdot a_i^{k - \frac{1}{p}}$ und Ungleichung 2.1.3.5 folgt:

$$b_i^{1 : (k - \frac{1}{p} + 1)} \leq \frac{1}{k - \frac{1}{p} + 1} \left((k - \frac{1}{p}) a_i + \|\mu_i\| \right)$$

Addiert man diese Ungleichungen für $i = 1, \dots, m$, so erhält man:

$$mb_i^{1 : (k - \frac{1}{p} + 1)} \leq 1, \text{ das heißt } b_i \leq m^{-k - 1 + \frac{1}{p}}.$$

Für den Gesamtfehler des zusammengesetzten Verfahrens erhält man damit:

$$|F| \leq 2cm^{-k - 1 + \frac{1}{p}} \cdot \sum_{i=1}^m \|D^{k_f}\|_p^{(i)}.$$

Mit Satz 2.1.3.4 folgt:

$$|F| \leq 2cm^{-k} \|D^{k_f}\|_p \text{ und damit:}$$

$$e_{km}(\tilde{W}_p^k([0, 1]), \mu) \leq 2cm^{-k}, \text{ woraus die Behauptung folgt.}$$

2.1.3.10 Satz

Es seien $k, s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ mit $pk > s$. Dann gilt:

$$e_n(\tilde{W}_p^k([0, 1]^s)) \prec n^{-\frac{k}{s}}.$$

Zum Beweis:

Der Beweis verläuft ähnlich wie im Falle $s = 1$ (2.1.3.9), jedoch ist das Verfahren, wie das Maß μ zerlegt wird, wesentlich komplizierter.

Aufgrund der komplizierten Geometrie des $\mathbb{R}^s$ für $s > 1$ kann man nämlich den Würfel $[0,1]^s$ i.a. nicht in m^s Teilwürfel zerlegen derart, daß alle

$$b_i = \|\mu_i\| \cdot a_i^{k - \frac{s}{p}} \text{ gleich groß sind.}$$

Zum Beweis von 2.1.3.10 brauchen wir daher folgenden Zerlegungssatz, dem wir uns zunächst zuwenden:

2.1.3.11 Satz

Sei $\mu \in M([0,1]^s)$ mit $\|\mu\| \leq 1$ und seien $\delta, \alpha > 0$. Dann existieren N Maße μ_i ($i = 1, \dots, N$) derart, daß gilt:

$$a) \sum_{i=1}^N \mu_i = \mu \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N \|\mu_i\| \leq 1$$

b) Der Träger von μ_i liegt in einem Würfel der Seitenlänge a_i ,

$$\text{es gilt } \|\mu_i\| \cdot a_i^\alpha \leq \delta \quad \text{für jedes } i \text{ und } \sum_{i=1}^N a_i^s = 1.$$

c) Für die Zahl N gilt $N < c \cdot \delta^{-\frac{s}{\alpha+s}}$, wobei $c > 0$ nicht von δ oder μ abhängt.

Beweis:

Gegeben sei ein $\mu \in M([0,1]^s)$ mit $\|\mu\| \leq 1$ und $\delta, \alpha > 0$.

Wir betrachten folgende Zerlegung Z_1 von $[0,1]^s$ in Teilwürfel:

Ausgehend von $[0,1]^s$ wird jeder (Teil-)Würfel in 2^s Würfel mit halber Seitenlänge zerlegt, sofern für den betreffenden Würfel noch nicht gilt:

$$(1) \quad \|\mu_i\| \cdot a_i^\alpha \leq \delta.$$

Hierbei sei μ_i die Einschränkung von μ auf den i -ten Teilwürfel und a_i seine Seitenlänge.

Die Zerlegung wird also gerade solange fortgesetzt, bis die Ungleichung (1) für jeden der sich ergebenden Würfel

W_i ($i = 1, 2, \dots, N(\delta)$) erfüllt ist.

Es gilt dann

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{N(\delta)} \mu_i = \mu, \quad \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\| \leq 1$$

und

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{N(\delta)} a_i^s = 1.$$

Es genügt zu zeigen, daß dann ein $c > 0$ (unabhängig von μ oder δ) existiert, so daß gilt:

$$(4) \quad N(\delta) \leq c \cdot \delta^{-\frac{s}{s+\alpha}}.$$

Um (4) zu beweisen, denken wir uns die Zerlegung Z_1 nicht ganz durchgeführt, genauer: Wir betrachten die Zerlegung Z_2 bei der ein (Teil-)Würfel nur noch dann in 2^s kleinere zerlegt wird, wenn für einen der kleineren immer noch die Ungleichung $\|\mu_i\| \cdot a_i^\alpha > \delta$ gilt.

Auf diese Weise erhält man die Zerlegung

$Z_2 = \{ M_i \mid i = 1, 2, \dots, \tilde{N}(\delta) \}$ mit

$$(5) \quad \tilde{N}(\delta) \geq 2^{-s} N(\delta).$$

Offenbar genügt es, die Ungleichung (4) für $\tilde{N}(\delta)$ anstelle von $N(\delta)$ zu beweisen.

Es sei M die Anzahl der M_i ($i = 1, \dots, \tilde{N}(\delta)$), für die gilt:

$$(6) \quad \|\mu_i\| a_i^\alpha > \delta$$

Der größte Würfel in Z_2 habe die Seitenlänge $l_1 = 2^{-a}$,
der kleinste Würfel in Z_2 habe die Seitenlänge $l_2 = 2^{-b}$.

Dann gilt:

$$(7) \quad \tilde{N}(\delta) \leq (b - a) \cdot 2^S \cdot M.$$

Der Würfel $M_a \in Z_2$ habe die Seitenlänge l_1 , der Würfel $M_b \in Z_2$ habe die Seitenlänge l_2 und gehöre zu den Würfeln, für die (6) gilt.

Wir definieren ein $\mu' \in M([0,1]^S)$ durch folgende Eigenschaften:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mu' &= \mu \text{ außerhalb von } M_a \text{ und } M_b, \mu' = 0 \text{ auf } M_b \\ \text{und } \mu' &= \|\mu\|_{M_b} \cdot 2^{as} \cdot \lambda^s \text{ auf } M_a. \end{aligned}$$

Durch leichtes Nachrechnen überzeugt man sich von

$$(9) \quad \|\mu'\| \leq 1.$$

Wir wenden nun die Zerlegungstechnik Z_2 auf das Maß μ' an und erhalten so eine Zerlegung

$$Z'_2 = \{ M'_i \mid i = 1, \dots, \tilde{N}'(\delta) \}.$$

Wir vergleichen nun $\tilde{N}'(\delta)$ mit $\tilde{N}(\delta)$:

Man überzeugt sich, daß durch die Änderung des Maßes auf M_b die Zahl der Würfel höchstens um $(b - a)2^S$ kleiner wird. Andererseits können durch Zerlegung von M_a neue Würfel hinzukommen:

Zunächst folgt, daß auf M_a gilt:

$$(10) \quad \mu' = k \lambda^s \text{ mit } k > \delta \cdot 2^{b\alpha + as} \quad (\text{auf } M_a).$$

Wir bestimmen $m \in \mathbb{N}$ so, daß gilt:

$$(11) \quad (2^S)^{m-2} < b - a \leq (2^S)^{m-1}$$

und wollen angeben, wann der Würfel M_a m -mal in dann insgesamt $(2^S)^m$ Würfel zerlegt wird.

Dies ist jedenfalls dann der Fall, wenn gilt:

$$(12) \quad (2^{-a} \cdot 2^{-m})^{\alpha} \cdot \delta \cdot 2^{b\alpha - sm} \geq \delta$$

das heißt: Wenn $(b - a)\alpha \geq m(s + \alpha)$ gilt.

Zusammen mit (11) folgt hieraus, daß ein $c_{s,\alpha} > 0$ existiert, so daß (12) erfüllt ist, falls gilt:

$$(13) \quad b - a = c_{s,\alpha}.$$

Damit haben wir gezeigt: Gilt (13), so auch

$$(14) \quad \tilde{N}'(\delta) \geq \tilde{N}(\delta).$$

Durch mehrfaches Anwenden dieser Konstruktion folgt:

$$(15) \quad \text{Ist } \mu \in M([0,1]^S) \text{ mit } \|\mu\| \leq 1 \text{ und } \delta > 0, \\ \text{so gibt es ein } \mu' \in M([0,1]^S) \text{ mit } \|\mu'\| \leq 1 \text{ mit} \\ b' - a' < c_{s,\alpha} \text{ und } \tilde{N}'(\delta) \geq \tilde{N}(\delta).$$

Wir schätzen jetzt dieses $\tilde{N}'(\delta)$ von oben her ab:

Aus (7) folgt:

$$(16) \quad \tilde{N}'(\delta) \leq c_{s,\alpha} \cdot 2^S \cdot M'.$$

Um M' abzuschätzen genügt es, folgende Ungleichungen zu betrachten:

$$(17) \quad \|\mu_i\| \cdot a_i^{\alpha} \geq \delta; \quad \sum_{i=1}^{M'} \|\mu_i\| \leq 1; \quad \sum_{i=1}^{M'} a_i^s \leq 1.$$

Hieraus folgt (wieder mit Hilfe von Ungleichung 2.1.3.5):

$$(18) \quad M' \leq \delta^{-\frac{s}{\alpha+s}},$$

zusammen mit (5), (15) und (16) also:

$$(19) \quad N(\delta) \leq 2^S \tilde{N}(\delta) \leq 2^S \tilde{N}'(\delta) \leq \\ \leq 2^S \cdot 2^S \cdot c_{s,\alpha} \cdot M' \leq 2^S \cdot 2^S \cdot c_{s,\alpha} \cdot \delta^{-\frac{s}{\alpha+s}}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Damit können wir nun Satz 2.1.3.10 beweisen:

Beweis (von Satz 2.1.3.10):

Gegeben sei $\mu \in M([0,1]^S)$ mit $\|\mu\| \leq 1$, $\delta > 0$ und k, s und p wie in Voraussetzung von 2.1.3.10.

Dann gilt $k - \frac{s}{p} > 0$. Wir setzen nun $\alpha = k - \frac{s}{p}$ und benützen Satz 2.1.3.11:

Zu der Zerlegung Z_1 (siehe Beweis von 2.1.3.11) betrachten wir folgende Quadraturformel:

Für $i = 1, \dots, N(\delta)$ gelte $\mu_i \in M_m$, wobei $m = \binom{s+k-1}{k-1}$.

Weiter habe $\tilde{\mu}_i$ seine Stützstellen in W_i und es gelte

$\|\tilde{\mu}_i\| \leq \|\mu_i\|$ und $\tilde{\mu}_i(g) = \mu_i(g)$ für alle $g \in P(k, s)$. Nach dem Interpolationssatz (1.2.1) existieren solche $\tilde{\mu}_i$.

Für die zusammengesetzte Quadraturformel $\mu_\delta = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \tilde{\mu}_i$ gilt dann:

Die Quadraturformel μ_δ liegt in M_n für

(*) $n = \binom{s+k-1}{k-1} \cdot N(\delta)$ und es gilt

$$\mu_\delta(g) = \mu(g) \quad \text{für alle } g \in P(k, s).$$

Für den Fehler von μ_δ gilt folgende Abschätzung:

$$|\mu_\delta(f) - \mu(f)| \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} |\tilde{\mu}_i(f) - \mu_i(f)| \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} 2c' \cdot \|\mu_i\| \cdot a_i^{k-\frac{s}{p}} \cdot \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^i \right) \quad (\text{nach 2.1.1.8}).$$

Nach Konstruktion, aufgrund der Behauptung und nach Satz 2.1.3.4 gilt weiter:

$$\begin{aligned}
 |\mu_\delta(f) - \mu(f)| &\leq 2c'\delta \sum_{i=1}^{N(\delta)} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p^i \leq \\
 &= 2c'\delta N(\delta)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p \leq 2\tilde{c}\delta \cdot \delta^{\frac{s(p-1)}{s-sp-pk}} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p = \\
 &= 2\tilde{c}\delta^{\frac{-pk}{s-sp-pk}} \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_p.
 \end{aligned}$$

In Verbindung mit (*) folgt: Für jedes $\delta > 0$ und $n = \binom{s+k-1}{k-1}$.
 $\cdot c \cdot \delta^{\frac{sp}{s-sp-pk}}$ gilt:

$$e_n(1_{W_p^k}([0,1]^s)) \leq 2\tilde{c} \cdot \delta^{\frac{-pk}{s-sp-pk}}.$$

Hieraus folgt die Aussage des Satzes.

2.2 Die Größen $e_n(B)$ für Vektorräume

2.2.1 Bemerkung

Ist $V \subseteq C(K)$ ein Vektorraum der Dimension m , so gilt $d_n(V) = \infty$ für $n < m$ (folgt aus 1.3.3 a) und $d_n(V) = 0$ für $n \geq m$. Für $n \geq m$ gilt auch $e_n(V) = 0$ (1.2.2). Nicht so einfach ist dagegen zu entscheiden, wie sich $e_n(V)$ für $n < m$ verhält.

2.2.2 Beispiel

Es sei $K = [0,1]$ und $V = P_2$. Dann gilt $\dim V = 2$ und $e_1(V) = \infty$.

Beweis:

Betrachte das Maß μ definiert durch $\mu(f) = f(0) - f(1)$ und nehme an $\mu(f) = af(x_0)$ für alle $f \in V$. Dann ergibt sich für $\tilde{f}(x) = x - x_0$ ein Widerspruch:

$$\mu(\tilde{f}) = -1, \text{ aber } a\tilde{f}(x_0) = 0.$$

2.2.3 Beispiel

Die Vermutung, daß $e_n(V) = \infty$ gilt für beliebige V und $n < m = \dim V$, ist falsch. Dies zeigt folgendes Beispiel:

$V = \langle f_1, f_2 \rangle$, wobei $f_1(x) = 2x - 1$ und $f_2(x) = 1 - |x - \frac{1}{2}|$ (auf $K = [0,1]$).

Dann gilt $\dim V = 2$, aber $e_1(V) = 0$.

Beweis von $e_1(V) = 0$:

Sei $\mu \in M(K)$ mit $\mu(f_1) = d_1$ und $\mu(f_2) = d_2$. Ist $d_1 = 0$, so wähle als Stützstelle x_0 der Quadraturformel den Punkt $x_0 = \frac{1}{2}$ und setze $a = d_2$.

Für alle $f \in V$ gilt dann $\mu(f) = af(x_0)$.

Ist dagegen $d_1 \neq 0$, so ist $d_2 : d_1 \in \mathbb{R}$ und nach Definition von f_1 und f_2 existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)}. \text{ Dann ist } \mu_1(f) = af(x_0) \text{ mit } a = \frac{d_2}{d_1} \text{ eine}$$

Quadraturformel mit $\mu_1(f) = \mu(f)$ für alle $f \in V$.

2.2.4 Bemerkung

Ein Beispiel wie in 2.2.3 (mit $e_n(V) = 0$ für ein $n < \dim V$) ist nicht für beliebige K möglich. Ist etwa K abzählbar, so gilt $e_n(V) = \infty$ für alle V mit $\dim V > n$.

Genauere Analyse zeigt, daß es auch überabzählbare K mit dieser Eigenschaft gibt. Entscheidend ist, ob K zerstreut ist im Sinne der folgenden Definition:

Ein kompakter Hausdorff-Raum K heißt zerstreut falls K keine nichtleere Teilmenge ohne isolierte Punkte hat.

Der folgende Satz geht auf verschiedene Arbeiten von CANTOR, RUDIN, PELCZYNSKI und SEMADENI zurück. Wir verweisen dazu auf das Buch von SEMADENI [1].

2.2.5 Satz

Es sei K kompakter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) K ist zerstreut
- ii) jedes Maß auf K ist atomar
- iii) es gibt keine stetige, surjektive Abbildung $S : K \rightarrow [0,1]$.
- iv) ist $S : K \rightarrow [0,1]$ stetig, so ist $S(K)$ höchstens abzählbar.

2.2.6 Satz

Es sei K kompakt und nicht zerstreut. Dann existiert ein $V \subseteq C(K)$ mit $\dim V = \infty$ und $e_1(V) = 0$; jedes Maß $\mu \in M(K)$ läßt sich also darstellen in der Form

$$\mu(f) = a f(x_0) \quad (\text{für alle } f \in V).$$

Beweis:

Da K nicht zerstreut ist, existiert ein stetiges, surjektives $h : K \rightarrow [0,1]$. Da $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ ein Peano-Raum ist, existiert dann sogar eine stetige surjektive Abbildung $h^* : K \rightarrow [-1,1]^{\mathbb{N}}$. Dann sind die i -ten Projektionen h_i^* ($i \in \mathbb{N}$) von h^* stetige Funktionen. Man überlegt sich leicht, daß sie linear unabhängig sind, es gilt also $\dim V = \infty$ für $V = \langle h_1^*, h_2^*, \dots \rangle$. Sei $\mu \in M(K)$ mit $\|\mu\| \leq 1$. Dann gilt $\mu(h_i^*) = k_i \in [-1,1]$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Sei $x_0 \in K$ so gewählt, daß $h^*(x_0) = (k_1, k_2, \dots)$.

Dann gilt $\mu(h_i^*) = h_i^*(x_0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also $\mu(f) = f(x_0)$ für alle $f \in V$, also $e_1(V, \mu) = 0$.

2.2.7 Bemerkung

Mit Hilfe des Satzes 2.2.6 sieht man leicht die Richtigkeit der Behauptung in Bemerkung 1.3.4. b).

2.2.8. Satz

Es sei K kompakt und zerstreut, $V \subseteq C(K)$ und $\dim V = m$.

Dann gilt für alle $n < m$: $e_n(V) = \infty$.

Beweis: Es sei $V = \langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ mit $m \geq 2$. Dann ist

$Y = \{ (f_1(x), \dots, f_m(x)) \mid x \in K \}$ eine abzählbare Teilmenge des $\mathbb{R}^m$. Es sei nun $M = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}, y_i \in Y \}$.

Da der $\mathbb{R}^m$ nicht Vereinigung ist von abzählbar vielen Unterräumen kleinerer Dimension, gilt: M ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$.

Es sei $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m \setminus M$. Betrachte ein $\mu \in M(K)$ mit

$$\tilde{y} = (\mu(f_1), \dots, \mu(f_m)).$$

Behauptung: $e_n(V, \mu) = \infty$.

Wäre nämlich $\mu(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ für alle $f \in V$, so wäre

$$\mu(f_j) = \sum_{i=1}^n a_i f_j(x_i) \text{ für } j = 1, \dots, m \text{ und damit würde wegen}$$

$$\tilde{y} = (\mu(f_1), \dots, \mu(f_m)) = \left(\sum_{i=1}^n a_i f_1(x_i), \dots, \sum_{i=1}^n a_i f_m(x_i) \right)$$

$$\text{gelten: } \tilde{y} = \sum_{i=1}^n a_i y_i \text{ mit } y_i \in Y \text{ und damit } \tilde{y} \in M.$$

2.2.9. Bemerkung

Die bewiesenen Sätze gestatten nicht die Berechnung der $e_n(V)$ für $n < m = \dim V$, wenn V ein gegebener Teilraum etwa von $C([0,1])$ ist.

Wie verhält sich z.B. $e_n(V)$ für $V = P_m$?

Bekanntlich braucht man für positive Maße auf $[0,1]$ nur etwa $\frac{1}{2}m$ Stützstellen, um μ auf P_m exakt zu integrieren (sogenannte Gauß'sche Quadraturverfahren, siehe etwa SHAPIRO [1]). Als Gegenstück dazu zeigen wir:

2.2.10. Satz

Es sei $K = [0,1]$ und $V = P_m$. Dann gilt für alle $n < m$:

$$e_n(V) = \infty.$$

Beweis:

Sei μ ein Maß auf $[0,1]$, für welches gilt:

$$\mu(\text{id}^i) = 0 \text{ für } i = 0, \dots, m-2 \text{ und } \mu(\text{id}^{m-1}) = 1.$$

(Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert so ein Maß).

Wir nehmen an, daß $\mu(f) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i f(x_i)$ für alle $f \in P_m$ und können dabei voraussetzen, daß die x_i paarweise verschieden sind. Angewendet auf die id^i ($i = 0, \dots, m-1$) führt diese Gleichung auf folgendes System:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 + a_2 + \dots + a_{m-1} \\ 0 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{m-1} x_{m-1} \\ &\dots \\ 1 &= a_1 x_1^{m-1} + a_2 x_2^{m-1} + \dots + a_{m-1} x_{m-1}^{m-1} \end{aligned}$$

Nach dem Satz über die Vandermonde'sche Determinante ist das Gleichungssystem, das entsteht, wenn man die letzte Gleichung wegläßt, stets eindeutig lösbar, die Lösung lautet

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$$

Hieraus folgt, daß das gesamte Gleichungssystem nicht lösbar ist.

2.2.11 Bemerkungen

a) Die Sätze 2.2.6 und 2.2.8 geben zusammen eine Charakterisierung der zerstreuten Räume:

Ein (kompaktes) K ist zerstreut genau dann, wenn für jeden m -dimensionalen Vektorraum $V \subseteq C(K)$ ($m > 1$) gilt: $e_{m-1}(V) = \infty$.

b) Ist K nicht zerstreut, so ist für ein $V \subseteq C(K)$ mit $\dim V = m$ die Aussage $e_n(V) = 0$ auch für ein $n < m$ möglich. Nach 1.3.9 gilt dies genau dann, wenn:

$$\bigwedge_{\mu \in M(K)} \bigvee_{x \in K^n} \bigwedge_{f \in V} (f(x_i) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n \Rightarrow \mu(f) = 0).$$

c) Der Beweis von 2.2.10 liefert eine hinreichende Bedingung für $e_n(V) = \infty$ (wobei $\dim V > n$):

Es gebe linear unabhängige $f_i \in V$ ($i = 1, \dots, n$) mit der Eigenschaft

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(x_1) & \dots & f_n(x_n) \end{pmatrix} \neq 0$$

für beliebige paarweise verschiedene $x_1, \dots, x_n \in K$.

Dann gilt: $e_n(V) = \infty$.

Kapitel 3

Die n-ten stochastischen unteren Fehlergrenzen von stochastischen Quadraturverfahren

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften der Größen

$q_n(B, \mu)$ und $q_n(B)$

Wir geben zunächst allgemeine Definitionen bezüglich stochastischer Quadraturverfahren (oder Monte Carlo-Integration, wie man auch sagt) und definieren dann die zu $e_n(B, \mu)$ und $e_n(B)$ analogen Größen $q_n(B, \mu)$ und $q_n(B)$.

3.1.1 Definitionen und Bezeichnungen

Eine stochastische Quadraturformel Q_n mit n Stützstellen auf K ist eine Familie $(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n)$ von Zufallsvariablen mit Verteilung der a_i in $\mathbb{R}$ und der x_i in K .

Mit $Q_n(f)$ bezeichnen wir die Zufallsvariable $Q_n(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ mit $S_n = S_n(K)$ die Menge der stochastischen Quadraturformeln mit n Stützstellen auf K . Weiter sei $E(\cdot)$ der Erwartungswert einer Zufallsvariablen.

Eine stochastische Quadraturformel $Q_n \in S_n(K)$ heißt erwartungstreu (bezüglich $\mu \in M(K)$), falls für jedes $f \in L_1(K, \mu)$ gilt:

$$E(Q_n(f)) = \mu(f).$$

Die Güte von $Q_n(f)$ als Approximation von $\mu(f)$ messen wir mit der Größe

$$\sigma(Q_n(f), \mu) = (E(Q_n(f) - \mu(f))^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ist Q_n erwartungstreu, so stimmt $\sigma(Q_n(f), \mu)$ überein mit der Streuung (=Standardabweichung) der Zufallsvariablen $Q_n(f)$.

Die zu $e_n(B, \mu)$ analoge GröÙe ist die n-te stochastische untere Fehlergrenze von stochastischen Quadraturverfahren

$$\sigma_n(B, \mu) := \inf_{Q_n \in S_n} \sup_{f \in B} \sigma(Q_n(f), \mu).$$

Weiter definieren wir die zu $e_n(B)$ analoge GröÙe

$$\sigma_n(B) := \sup_{\substack{\mu \in M(K) \\ \|\mu\| \leq 1}} \sigma_n(B, \mu).$$

3.1.2 Bemerkungen

a) Ist $\mu \in M(K)$ beliebig und $B \subseteq C(K)$, so gilt

$$\sigma_n(B, \mu) \leq e_n(B, \mu).$$

Dies folgt einfach daraus, daÙ man jedes $\mu_n \in M_n(K)$ auch ansehen kann als ein Element von $S_n(K)$, nämlich als stochastische Quadraturformel mit konstanten Koeffizienten. Bei dieser Identifizierung gilt $\sigma(\mu_n(f), \mu) = |\mu_n(f) - \mu(f)|$, woraus die Behauptung folgt.

Hieraus folgt natürlich auch $\sigma_n(B) \leq e_n(B)$ für beliebige $B \subseteq C(K)$.

Interessant (für die praktische Verwendung) werden Monte Carlo-Verfahren erst dann, wenn $\sigma_n(B, \mu)$ wesentlich schneller gegen 0 konvergiert als $e_n(B, \mu)$ (oder wenn die erste Folge gegen 0 konvergiert, nicht aber die zweite).

b) Bei der Definition von $\sigma_n(B, \mu)$ genügt die Voraussetzung $B \subseteq L_1(K, \mu)$. Wir brauchen uns also nicht auf stetige Funktionen zu beschränken.

c) Häufig betrachtet man nur speziellere stochastische Quadraturverfahren:

Einerseits wird oft Erwartungstreue vorausgesetzt, andererseits wird gefordert, daÙ die Zufallsvariablen $a_1, \dots, a_n$ von der

Gestalt $a_i = a_i(x_1, \dots, x_n)$, d.h. feste Funktionen der Stützstellen sind. Wir bemerken, daß die in Abschnitt 3.2 betrachteten stochastischen Quadraturformeln von dieser spezielleren Art sind.

3.1.3 Bemerkungen zur gewöhnlichen Monte Carlo-Methode

Die einfachsten stochastischen Quadraturformeln (für K und μ) erhält man, wenn man setzt:

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot f(x_i).$$

Hierbei seien die x_i voneinander unabhängig mit Verteilung μ .

Aus elementaren Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt:

$$\sigma(Q_n(f), \mu) \leq n^{-\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_2.$$

Hieraus folgt die Abschätzung

$$\sigma_n(B, \mu) \leq n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } B = \{ f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_2 \leq 1 \}.$$

Insbesondere folgt auch die Abschätzung

$$\sigma_n(1_C(K)) \leq n^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für beliebige } K.$$

Wir behandeln in 3.2 stochastische Quadraturverfahren, die für gewisse Funktionenklassen ein besseres Konvergenzverhalten haben.

Wir geben nun eine Abschätzung der Größe $\sigma_n(B, \mu)$ von unten an, die von BAHVALOV [1] stammt. Sie wurde so formuliert, daß man sie mit Satz 1.3.5 vergleichen kann.

3.1.4 Satz (BAHVALOV [1])

Es sei $B \subseteq L_1(K, \mu)$. Es gebe $2n$ Funktionen f_i ($i = 1, \dots, 2n$) mit disjunkten Trägern derart, daß gilt:

$\mu(f_i) \geq \varepsilon$ für alle i und $\sum_{i=1}^{2n} \delta_i f_i \in B$ für alle Vorzeichenverteilungen $\delta_i \in \{1, -1\}$. Dann gilt:

$$\sigma_n(B, \mu) \geq c \cdot \varepsilon \cdot n^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei ist $c > 0$ eine Konstante, die nicht von B oder n abhängt.

3.1.5 Folgerung

a) Sei K kompakt mit unendlich vielen Elementen. Für die Einheitskugel ${}^1C(K)$ in $C(K)$ gilt dann:

$$\sigma_n({}^1C(K)) \asymp n^{-\frac{1}{2}}.$$

b) Es gilt: $\sigma_n({}^1C([0,1]^S), \lambda^S) \asymp \sigma_n({}^1L_2([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{1}{2}}.$

c) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$ gilt:

$$\sigma_n({}^1W_p^k([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2}}.$$

d) Für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$, $s \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sigma_n(C^{k,\alpha}([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{s} - \frac{1}{2}}.$$

Wir verzichten auf die Beweise, die keine neuen Überlegungen erfordern. Die Aussage 3.1.5 d) wird schon in BAHVALOV [1] bewiesen.

Wir kommen nun zu einem Satz von ERMAKOW, ZOLOTUKHIN [1], der sehr allgemein die Existenz gewisser stochastischer Quadraturformeln sicherstellt und insofern als Gegenstück zum Interpolationssatz 1.2.1 verstanden werden kann. (Der Satz wird auch bewiesen und kommentiert in ERMARKOW [1] und in HAMMERSLEY, HANDSCOMB [1]. Für Beispiele vergleiche HANDSCOMB [1]. Wir formulieren den Satz in der Form, wie wir ihn später brauchen; insbesondere lassen wir beliebige endliche Maße zu - nicht nur Wahrscheinlichkeitsmaße.)

3.1.6 Satz

Es sei μ ein endliches positives Maß und $V \in L_2(\mu)$ ein n -dimensionaler Vektorraum, mit $1 \in V$. Dann existiert eine stochastische Quadraturformel Q_n mit n Stützstellen derart, daß gilt:

- a) $E(Q_n(f)) = \mu(f)$ für alle $f \in L_1(\mu)$, d.h. Q_n ist erwartungstreu
- b) $Q_n(f) = \mu(f)$ für alle $f \in V$, d.h. die Elemente aus V werden exakt integriert
- c) $\sigma^2(Q_n(f)) \leq \|\mu\| \cdot \inf_{g \in V} \|f - g\|_2^2$

Beweisskizze:

Wir können annehmen $V = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$ mit $\varphi_1 = \|\mu\|^{-\frac{1}{2}}$ und $\mu(\varphi_i \cdot \varphi_j) = \delta_{ij}$.

Aus der Cramer'schen Regel folgt sofort:

Sind $x_1, \dots, x_n \in K$ mit $\det(\varphi_i(x_j)) \neq 0$, so gilt für die interpolatorische Quadraturformel μ_n mit n Stützstellen $x_1, \dots, x_n$:

$$\mu_n(f) = \frac{\det A_1}{\det A} \cdot \|\mu\|^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei sei $A = (\varphi_i(x_j))_{i,j}$ und A_1 die Matrix, die entsteht, wenn man bei A die Funktion φ_1 ersetzt durch f .

Wir betrachten nun die stochastische Quadraturformel $Q_n(f)$, wobei die Stützstellen gemäß

$$c \cdot (\det A)^2 \cdot \mu(dx_1) \dots \mu(dx_n)$$

verteilt seien (mit $c > 0$ so, daß ein W-Maß entsteht) und die Gewichte a_i jeweils so bestimmt sind, daß eine interpolatorische Quadraturformel entsteht.

Mit Hilfe bekannter Integralidentitäten zeigt man dann die geforderten Eigenschaften von $Q_n(f)$.

3.1.7 Satz

Es sei $\mu \in M(K)$ positiv und $B \in L_2(K, \mu)$ symmetrisch. Dann gilt

$$\sigma_{n+1}(B, \mu) \leq d_{n,2}(B, \mu) \cdot \|\mu\|^{\frac{1}{2}}.$$

(Hierbei sei $d_{n,2}(B, \mu)$ die n-te Weite von B im Raum $L_2(K, \mu)$, das heißt:

$$d_{n,2}(B, \mu) = \inf_{X_n} \sup_{f \in B} \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_2, \text{ wobei } X_n \text{ alle n-dimensio-}$$

nalen linearen Mannigfaltigkeiten von $L_2(K, \mu)$ durchläuft).

Beweis:

Seien μ und B gegeben. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert dann ein linearer Unterraum M von $L_2(K, \mu)$ der Dimension n mit

$$\sup_{f \in B} \inf_{g \in M} \|f - g\|_2 \leq d_{n,2}(B, \mu) + \varepsilon.$$

Wir wenden nun den Satz 3.1.6 auf den Unterraum $V = \langle M, 1 \rangle$ an.

Dann existiert ein Q_{n+1} mit $\sigma^2(Q_{n+1}(f)) \leq \|\mu\| \cdot \inf_{g \in V} \|f - g\|_2^2$,

das heißt:

$$\sup_{f \in B} \sigma^2(Q_{n+1}(f)) \leq \|\mu\| \cdot (d_{n,2}(B, \mu) + \varepsilon)^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

3.1.8 Bemerkung

Mit Hilfe von 3.1.7 und bekannten Abschätzungen von $d_{n,2}(B, \mu)$

(Vergleiche dazu KORNEICUK [1] und PARFENOV [1]) erhält man Abschätzungen von $\sigma_n(B, \mu)$.

3.2 Die Größen $\sigma_n(B, \mu)$ und $\sigma_n(B)$ für spezielle Funktionenklassen B

3.2.1 Bemerkung

In diesem Abschnitt untersuchen wir das asymptotische Verhalten der

Größen $\sigma_n(B, \lambda^S)$ und $\sigma_n(B)$ für die Klassen $1_{W_p}^k([0,1]^S)$, $\tilde{C}^{k,\alpha}([0,1]^S)$

und $\tilde{B} = \{ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Var } f \leq 1 \}$.

Zunächst geben wir die zur Behandlung der Sobolev- und Hölder-Klassen notwendigen Approximationssätze an.

3.2.2 Satz

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $s \in \mathbb{N}$.

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$. Dann existiert ein $c > 0$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $f \in \tilde{C}^{k,\alpha}([a,b]^s)$, so existiert ein $g \in P(k+1,s)$ mit

$$\|f - g\|_{\infty} \leq c \cdot (b - a)^{k+\alpha}.$$

b) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $c > 0$ derart, daß für jedes $f \in \tilde{W}_2^k([a,b]^s)$ ein $g \in P(k,s)$ existiert mit

$$\|f - g\|_2 \leq c \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f\|_2 \cdot (b - a)^k.$$

c) Es sei $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $kp > s$. Dann existiert ein $c > 0$ derart, daß für jedes $f \in \tilde{W}_p^k([a,b]^s)$ ein $g \in P(k,s)$ existiert mit

$$\|f - g\|_{\infty} \leq c \cdot \sum_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha} f\|_p \cdot (b - a)^{k - \frac{s}{p}}.$$

Beweis:

Die Aussage c) wurde in 2.1.1.7 gezeigt. Genauso folgt auch b) aus der verallgemeinerten Poincaré-Ungleichung 2.1.1.5. Die Aussage a) zeigt man leicht mit dem Satz von Taylor.

Der Fall des Lebesgue-Maßes ist wieder einfacher als der allgemeine, wir nehmen diesen Fall daher vorweg:

3.2.3 Satz

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sigma_n(\tilde{C}^{k,\alpha}([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{S}-\frac{1}{2}}.$$

b) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq p \leq \infty$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sigma_n(\tilde{W}_p^k([0,1]^S), \lambda^S) \asymp n^{-\frac{k}{S}-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

In 3.1.5 wurden bereits die Abschätzungen von unten behandelt, so daß hier nur noch die von oben betrachtet werden müssen.

a) Es seien $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$, $s \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ gegeben.

Aus Satz 3.1.6 folgt:

Für $l = \dim P(k+1, s)$ existiert eine stochastische Quadraturformel Q_1 mit l Stützstellen in $[0, \frac{1}{m}]^S$ derart, daß gilt:

$$i) E(Q_1(f)) = \int_{[0, \frac{1}{m}]^S} f d\lambda^S$$

(für alle integrierbaren f)

$$ii) Q_1(f) = \int_{[0, \frac{1}{m}]^S} f d\lambda^S$$

(für alle $f \in P(k+1, s)$)

$$iii) \sigma^2(Q_1(f)) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^S \cdot \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_2^2$$

Wie bei den "gewöhnlichen" Quadraturverfahren betrachten wir auch hier zusammengesetzte Quadraturformeln: Wir wenden - voneinander unabhängig - obige Quadraturformel auf jeden der m^S Teilwürfel von $[0,1]^S$ an und erhalten eine Formel Q_n mit $n = l \cdot m^S$ Stützstellen und:

$$i) E(Q_n(f)) = \lambda^S(f) \quad \text{für } f \in L_1([0,1]^S, \lambda^S)$$

$$ii) Q_n(f) = \lambda^S(f) \quad \text{für } f \in P(k+1, s)$$

$$iii) \sigma^2(Q_n(f)) \leq \left(\frac{1}{m}\right)^S \cdot \sum_{j=1}^{m^S} \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{2,j}^2.$$

Mit Satz 3.2.2 a) folgt:

$$\inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{2, j}^2 \leq \left(\frac{1}{m}\right)^s \cdot \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{\infty, j}^2 \leq m^{-s} c^2 m^{-2k-2\alpha} \quad \text{für } f \in C^{k, \alpha}([0, 1]^s).$$

Daher gilt für $f \in C^{k, \alpha}([0, 1]^s)$:

$$\sigma^2(Q_n(f)) \leq m^{-s-2k-2\alpha} \cdot c^2, \text{ woraus wegen } n = 1 \cdot m^s \text{ die Behauptung folgt.}$$

b) Diese Aussage beweist man analog mit dem entsprechenden Approximationssatz 3.2.2 b).

3.2.4 Bemerkungen

- a) Bemerkenswert ist, daß in 3.2.3 b) die Einbettungsbedingung nicht vorausgesetzt werden muß. In diesem theoretischen Rahmen scheinen also stochastische Quadraturverfahren auf viel größere Funktionenklassen anwendbar zu sein als klassische. Genauere Untersuchungen, die Fragen der Realisierbarkeit der dazu benötigten Zufallsvariablen mit einschließen, zeigen aber, daß dieser Vorteil der stochastischen Quadraturverfahren nur ein scheinbarer ist.
- b) Satz 3.2.3 a) geht im Wesentlichen zurück auf BAHVALOV [1], der ihn für die kleinere Klasse $C^{k, \alpha}([0, 1]^s)$ gezeigt hat.
- c) Zusammengesetzte stochastische Quadraturformeln werden auch in der Arbeit HABER [2] betrachtet.

Mit den dort angegebenen Methoden läßt sich die (im Vergleich zu 3.2.3 b) schwächere) Aussage

$$\sigma_n(W_2^{k, \alpha}([0, 1]^s) \cap C^k([0, 1]^s), \lambda^s) \prec n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2}} \quad \text{zeigen.}$$

Wir betrachten jetzt $\sigma_n(1\tilde{w}_p^k(\square[0,1]^s))$ und $\sigma_n(\tilde{c}^{k,\alpha}(\square[0,1]^s))$.

Grundlegend dafür ist wieder der Zerlegungssatz 2.1.3.11.

3.2.5_Satz

a) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sigma_n(\tilde{c}^{k,\alpha}(\square[0,1]^s)) \asymp n^{-\frac{k+\alpha}{s}-\frac{1}{2}}.$$

b) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq p \leq \infty$ und $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes

$\mu \in M(\square[0,1]^s)$ der Form $\mu = g \cdot \lambda^s$ mit beschränktem g :

$$\sigma_n(1\tilde{w}_p^k(\square[0,1]^s), \mu) \prec n^{-\frac{k}{s}-\frac{1}{2}}.$$

c) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$, $2 \leq p \leq \infty$ und $s \in \mathbb{N}$ mit $pk > s$. Dann gilt:

$$\sigma_n(1\tilde{w}_p^k(\square[0,1]^s)) \asymp n^{-\frac{k}{s}-\frac{1}{2}}.$$

Beweis:

Die Beweise für die drei Aussagen verlaufen nahezu identisch - man muß nur den jeweils passenden Approximationssatz von 3.2.2 benutzen. Der Beweis wird hier für die Aussage a) hingeschrieben:

Satz 3.1.6 gilt nur für positive Maße. Wir zerlegen daher das gegebene μ in positiven und negativen Anteil und betrachten dann das zusammengesetzte Verfahren. Wir brauchen den Satz daher nur für positive μ zu beweisen.

Gegeben seien also $k \in \mathbb{N}_0$, $0 < \alpha \leq 1$, $s \in \mathbb{N}$ und $\mu \in M(\square[0,1]^s)$ mit $\mu \geq 0$ und $\|\mu\| \leq 1$. Weiter sei $\delta > 0$ gegeben. Wir setzen nun $\alpha' = k + \alpha$ und wenden den Satz 2.1.3.11 für dieses α' an.

Zu der Zerlegung Z_1 (siehe Beweis von 2.1.3.11) betrachten wir folgende stochastische Quadraturformel:

Für $i = 1, \dots, N(\delta)$ gelte $Q_i \in S_1$ wobei $1 = \dim P(k+1, s)$.

Weiter habe Q_i seine Stützstellen in W_i und es gelte:

- i) $E(Q_i(f)) = \mu_i(f)$ für alle $f \in L_1(\mu)$
- ii) $Q_i(f) \neq \mu_i(f)$ für alle $f \in P(k+1, s)$
- iii) $\sigma^2(Q_i(f)) \leq \|\mu_i\| \cdot \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{2, i}^2$.

(Wegen Satz 3.1.6 gibt es solche Q_i , da die μ_i nach Konstruktion 2.1.3.11 insbesondere positiv sind).

Für die zusammengesetzte Quadraturformel $Q_\delta = \sum_{i=1}^{N(\delta)} Q_i$ gilt dann:

- i) $Q_\delta \in S_n$ wobei $n = N(\delta) \cdot 1$
- ii) $E(Q_\delta(f)) = \mu(f)$ für alle $f \in L_1(\mu)$
- iii) $Q_\delta(f) \neq \mu(f)$ für alle $f \in P(k+1, s)$

Für die Varianz von $Q_\delta(f)$, $f \in \tilde{C}^{k, \alpha}([0, 1]^s)$ gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q_\delta(f)) &= \sum_{i=1}^{N(\delta)} \sigma^2(Q_i(f)) \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\| \cdot \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{2, i}^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\|^2 \cdot \inf_{g \in P(k+1, s)} \|f - g\|_{\infty, i}^2 \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\|^2 c^2 (b_i - a_i)^{2(k+\alpha)} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} c^2 \delta^2 = N(\delta) \cdot c^2 \cdot \delta^2 < c' \delta^{-\frac{s}{\alpha+k+s}} \cdot \delta^2. \end{aligned}$$

Hierbei hängt c' nicht von δ oder μ ab.

Für jedes $\delta > 0$ und $n = 1 \cdot N(\delta) \leq c'' \delta^{-\frac{s}{\alpha+k+s}}$ gilt also:

$$\sigma_n^2(\tilde{C}^{k, \alpha}([0, 1]^s), \mu) \leq c' \frac{2\alpha + 2k + s}{\alpha + k + s}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

3.2.6_Bemerkung

Wir wollen nun noch Aussagen über die Größen $\sigma_n(\tilde{B})$ und $\sigma_n(\tilde{B}, \lambda^1)$ für $\tilde{B} = \{f : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Var}(f) \leq 1\}$ machen.

Zunächst gilt $e_n(\check{B}) = \frac{1}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe 1.3.2; die Einschränkung, daß f stetig ist, ist nicht notwendig).

Nach 3.1.2 gilt also:

$$\sigma_n(\check{B}) \leq \frac{1}{2n}$$

Es stellt sich die Frage, ob $(\sigma_n(\check{B}))_{n \in \mathbb{N}}$ schneller gegen Null konvergiert als $(e_n(\check{B}))_{n \in \mathbb{N}}$ - wie dies ja bei allen bisher betrachteten Funktionenklassen der Fall war.

Mit Hilfe von 3.1.4 kann man versuchen, $\sigma_n(\check{B})$ von unten her abzuschätzen. Man erhält:

$$\sigma_n(\check{B}) \succ n^{-\frac{3}{2}}.$$

Das folgende Ergebnis zeigt, daß hier die Abschätzung nach BAHVALOV [1] (also Satz 3.1.4) nicht geeignet ist, um die exakte Konvergenzordnung von $\sigma_n(\check{B})$ zu bestimmen. Mit Hilfe geeigneter Mittelwertbildungen über Quadraturformeln und Funktionen sieht man, daß

$$\sigma_n(\check{B}) \asymp e_n(\check{B}) \asymp \frac{1}{n}$$

gilt. Gleichzeitig liegt hier ein Beispiel vor, bei dem der Übergang zu stochastischen Quadraturformeln keine Konvergenzbeschleunigung mit sich bringt.

3.2.7 Satz

Es sei $\check{B} = \{ f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{Var}(f) \leq 1 \}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sigma_n(\check{B}, \lambda^1) \geq \frac{1}{\sqrt{32} n}.$$

Beweis:

Betrachte die Menge A_n , die von den $4n$ Funktionen der Gestalt

$$f(x) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} & \text{falls } x \in \left[\frac{i_0}{2n}, \frac{i_0+1}{2n} \right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

($i_0 = 0, \dots, 2n-1$) gebildet wird.

Offensichtlich gilt $A_n \subseteq \tilde{B}$ und $\lambda^1(f) = \pm \frac{1}{4n}$ für $f \in A_n$.

Für $\mu_n \in M_n$ definieren wir $F(\mu_n) = \sum_{f \in A_n} (\mu_n(f) - \lambda^1(f))^2$.

Man überzeugt sich leicht von der Ungleichung

$$F(\mu_n) \geq 2n \cdot \lambda^1(f)^2 = \frac{1}{8n}.$$

Ist nun Q_n eine stochastische Quadraturformel, so läßt sich analog die Zufallsvariable $F(Q_n)$ definieren.

Aus obiger Ungleichung folgt: $E(F(Q_n)) \geq \frac{1}{8n}$ und damit

$$E((Q_n(f) - \lambda^1(f))^2) \geq \frac{1}{32n^2} \quad \text{für mindestens ein } f \in A_n.$$

Daher gilt $\sigma_n(B, \lambda^1) \geq \frac{1}{\sqrt{32} n}$.

3.2.8 Bemerkung

Durch leichte Modifikation der obigen Argumente erhält man ebenso:

$$\begin{aligned} & \sigma_n(\tilde{W}_1^1([0,1], \lambda^1)) \times \sigma_n(\tilde{W}_1^1([0,1])) \times e_n(\tilde{W}_1^1([0,1]), \lambda^1) \times \\ & \times e_n(\tilde{W}_1^1([0,1])) \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

1. Anhang:

Ausdehnung einiger Resultate auf allgemeinere Grundbereiche

Zunächst werden zwei Verallgemeinerungen des Interpolationssatzes

1.2.1 angegeben:

Satz (1)

Es sei X lokalkompakt und $C_0(X)$ der Raum der stetigen Funktionen

(nach $\mathbb{R}$), die im Unendlichen verschwinden. Zu $V \subseteq C_0(X)$,

$\dim V = n$ und $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ linear gibt es dann wieder

$x_1, \dots, x_n \in X$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $L(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$

für alle $f \in V$ und $\|L\| = \sum_{i=1}^n |a_i|$.

Satz (2)

Es sei X eine beliebige Menge und $B(X)$ der Raum der beschränkten

Funktionen (nach $\mathbb{R}$). Weiter sei $V \subseteq B(X)$ mit $\dim V = n$

und $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es zu jedem

$\varepsilon > 0$ Punkte $x_1, \dots, x_n \in X$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit

$L(f) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$ für alle $f \in V$ und: $\|L\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|L\| + \varepsilon$.

Beweis von Satz (1)

Es sei $\bar{X} = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X .

Zu $f \in C_0(X)$ definieren wir $\bar{f} : \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\bar{f}(x) = f(x)$ für

$x \in X$ und $\bar{f}(\infty) = 0$.

Es gilt dann $\bar{f} \in C(\bar{X})$. Wir wenden nun den Satz 1.2.1 an auf

$\bar{X}$, $\bar{V} = \{ \bar{f} \mid f \in V \}$ und $\bar{L}$ definiert durch $\bar{L}(\bar{f}) = L(f)$.

Wir erhalten

$$\bar{L}(\bar{f}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(x_i) \text{ mit } \sum_{i=1}^n |a_i| = \|\bar{L}\|$$

mit gewissen $a_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in \bar{X}$.

Wegen $\bar{f}(\infty) = 0$ für alle $\bar{f} \in \bar{V}$ können wir hierbei $x_1 \neq \infty$ annehmen.

Es gilt also auch:

$$L(f) = \bar{L}(\bar{f}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \text{ mit}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = \|\bar{L}\| = \|L\|.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis von Satz (2)

Die Menge $M = \{f \in V \mid \|f\| = 1\}$ ist kompakt, zu $\delta_1 > 0$

existieren also $f_1, \dots, f_m \in M$ mit

$$\bigwedge_{f \in M} \bigvee_i \|f - f_i\| \leq \delta_1.$$

Zu $\delta_2 > 0$ und $i = 1, \dots, m$ existiert ein $x_i \in K$ mit

$$|f_i(x_i)| \geq \|f_i\| - \delta_2.$$

Betrachte nun $K_1 = \{x_1, \dots, x_m\}$ und $V_1 = \{f|_{K_1} \mid f \in V\}$.

Dann ist V_1 ein Vektorraum mit $\dim V_1 \leq n$.

Wir ergänzen K_1 zu einer größeren, endlichen Menge K derart, daß für $V_2 = \{f|_K \mid f \in V\}$ gilt:

$$\dim V_2 = n.$$

Offensichtlich sind dann die Räume V und V_2 isomorph bezüglich der Abbildung $f \rightarrow f|_K$.

Für $f \in V$, $\|f\| = 1$ gilt: $\|f - f_i\| \leq \delta_1$ für ein gewisses i , woraus auch $\|f - f_i\|_K \leq \delta_1$ folgt.

Weiter gilt $\|f_i\|_K \geq \|f_i\| - \delta_2 = 1 - \delta_2$ und daher:

$$\|f\|_K \geq 1 - \delta_1 - \delta_2.$$

Daher gilt für alle $f \in V$, $f \neq 0$ die Beziehung $\frac{\|f\|_K}{\|f\|} \geq 1 - \delta_1 - \delta_2$.

Wir wenden nun Satz 1.2.1 an auf K , V_2 und $\bar{L}$, definiert durch

$\bar{L}(f|_K) = L(f)$ und erhalten:

$$\bar{L}(f|_K) = \sum_{i=1}^n a_i f|_K(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = L(f) \text{ mit}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i| = \|\bar{L}\|.$$

Aus der oben hergeleiteten Beziehung folgt

$$\|L\| \leq \|\bar{L}\| \leq \|L\| \frac{1}{1 - \delta_1 - \delta_2} \text{ und damit}$$

$$\|L\| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \|L\| \frac{1}{1 - \delta_1 - \delta_2}.$$

Mit Hilfe dieser Sätze kann man den Zusammenhang zwischen der n -ten Weite und der Rekonstruierbarkeit von linearen Funktionalen erweitern.

Ist X eine beliebige Menge, so sei $B(X)$ der Raum der beschränkten Funktionen nach $\mathbb{R}$ und $B'(X)$ sei der Dualraum von $B(X)$.

Mit d_n sei die n -te Weite nach Kolmogorov in $B(X)$ bezeichnet.

Zu $\mu \in B'(X)$, $S \in B(X)$ definieren wir wieder:

$$e_n(S, \mu) = \inf_{\substack{a_i \in \mathbb{R} \\ x_i \in X}} \sup_{f \in S} \left| \mu(f) - \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) \right| \text{ und}$$

$$e_n(S) = \sup_{\|\mu\| \leq 1} e_n(S, \mu).$$

Damit läßt sich 1.2.2 auf diese Situation erweitern - wir formulieren nur die zu 1.2.2 c analoge Aussage:

Satz (3)

Ist X beliebig und $S \in B(X)$ symmetrisch, so gilt für jedes

$n \in \mathbb{N}$:

$$e_n(S) \leq 2d_n(S).$$

(Beweis mit Satz (2) - ähnlich, wie 1.2.2 c bewiesen wurde.)

Bemerkungen

- i) Auf diese allgemeinere Situation lassen sich mehrere in Kapitel 1 bewiesene Sätze übertragen, so die Sätze 1.2.6, 1.3.5 und 1.3.7.
- ii) Für komplexwertige Funktionen und komplexe Maße gilt ein Analogon zum Interpolationssatz 1.2.1 (siehe SHAPIRO [1]). Nur benötigt man jetzt $2n-1$ Stützstellen, um ein komplexes Maß auf einem beliebigen n -dimensionalen Unterraum darzustellen. Satz 1.2.2 überträgt sich auf komplexe Maße ebenso wie die obigen Sätze (1) bis (3).
- iii) Überträgt man (auf naheliegende Weise) die Definition von $\sigma_n(S, \mu)$ und $\sigma_n(S)$ auf diesen allgemeineren Fall, so gilt wieder (siehe 3.1.2 a):

$$\sigma_n(S, \mu) \leq e_n(S, \mu) \quad \text{und}$$

$$\sigma_n(S) \leq e_n(S).$$

Zuletzt soll noch angedeutet werden, wie man die Sätze über das asymptotische Verhalten von $e_n(B)$ und $\sigma_n(B)$ im Falle der Hölder-Klassen oder Sobolev-Klassen über Grundbereichen $K \in [0,1]^S$ beweisen kann.

Hierfür ist es wichtig, den Zerlegungssatz 2.1.3.11 für solche allgemeineren Bereiche zur Verfügung zu haben.

Wir geben eine solche Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes an:

Satz:

Es sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^S$, die Ω_i haben paarweise keine gemeinsamen inneren Punkte und es gilt:

Zu Ω_i existiert ein $\varphi_i : \Omega_i \rightarrow [0,1]^S$ derart, daß φ_i und φ_i^{-1} Lipschitz-stetig sind.

Ist dann $\mu \in M(\Omega)$ mit $\|\mu\| \leq 1$ und $\delta, \alpha > 0$, so existieren

N Maße $\mu_i \in M(\Omega)$ derart, daß gilt:

a) $\sum_{i=1}^N \mu_i = \mu$ und $\sum_{i=1}^N \|\mu_i\| \leq 1$

b) Der Träger von μ_i liegt in einem Würfel der Seitenlänge a_i , es gilt $\|\mu_i\| a_i^\alpha \leq \delta$ für jedes i und $\sum_{i=1}^N a_i^S \leq K$, wobei K nur von Ω abhängt.

c) Für N gilt $N < c \delta^{-\frac{S}{\alpha+S}}$, wobei $c > 0$ nicht von δ oder μ abhängt.

Beweisidee:

Zunächst überlegt man sich, daß der Schritt von $m = 1$ auf größere m keine Schwierigkeiten bereitet.

Der Satz folgt für $m = 1$ aus dem Zerlegungssatz 2.1.3.11, wenn man zu einem $\mu \in M(\Omega)$ das zugehörige Bildmaß $\varphi(\mu) \in M([0,1]^S)$ betrachtet.

Hierbei ist zu beachten, daß zu φ Zahlen c und $C > 0$ existieren mit $c \lambda^S(A) \leq \lambda^S(\varphi(A)) \leq C \lambda^S(A)$ für beliebige meßbare Teilmengen A von Ω .

2. Anhang:

Zusammenhang mit einfachsten linearen Integralgleichungen

Gelegentlich ist eine Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben in der Form:

$$(1) \quad f(x) = \int g(x, t) \, d\mu(t) \quad (x \in N).$$

Hierbei sei $g : N \times K \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß für jedes $x \in N$ die Funktion $g(x, \cdot) : K \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist bezüglich dem vorgegebenen $\mu \in M(K)$.

Man kann nun versuchen, f zu approximieren durch eine Funktion $\tilde{f}$ der Gestalt:

$$(2) \quad \tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n a_i g(x, t_i).$$

Bezeichnet man die Quadraturformel $\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_{x_i} \in M_n$ mit μ_n und die Funktion $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}_{\mu_n}$, so gilt:

$$(3) \quad \tilde{f}_{\mu_n}(x) = \mu_n(g(x, \cdot)).$$

Da f durch ein $\tilde{f}_{\mu_n}$ approximiert werden soll, bietet sich folgende Fragestellung an:

Wie groß ist die Größe

$$(4) \quad F_n = \inf_{\mu_n \in M_n} \|f - \tilde{f}_{\mu_n}\|_{\infty} \quad ?$$

Zusätzlich ist das Konvergenzverhalten der Größe F_n interessant. In dieser Situation gilt die einfache:

Proposition

Für $B = \{ g(x, \cdot) \mid x \in N \}$ gilt $F_n = e_n(B, \mu)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 e_n(B, \mu) &= \inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{h \in B} |\mu(h) - \mu_n(h)| = \\
 &= \inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{x \in N} |\mu(g(x, \cdot)) - \mu_n(g(x, \cdot))| = \\
 &= \inf_{\mu_n \in M_n} \sup_{x \in N} |f(x) - \tilde{f}_{\mu_n}(x)| = \\
 &= \inf_{\mu_n \in M_n} \|f - \tilde{f}_{\mu_n}\|_{\infty} = F_n
 \end{aligned}$$

1. Beispiel:

Ein besonders einfaches Beispiel ist die Suche einer Stammfunktion einer gegebenen integrierbaren Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Stammfunktion f gilt:

$$f(x) = \int_a^x h(t) dt.$$

Mit $B = \{h \cdot 1_{[a, x]} \mid x \in [a, b]\}$ gibt die Größe $e_n(B, \mu)$ an, wie gut man f (bezüglich der Sup-Norm) approximieren kann durch eine Treppenfunktion der Gestalt:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n 1_{[a, x]} a_i h(x_i).$$

Da sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall (bezüglich der Sup-Norm) beliebig genau durch Treppenfunktionen approximieren läßt, gilt hier für jedes integrierbare h :

$$e_n(B, \lambda^1) = F_n \longrightarrow 0.$$

2. Beispiel:

Es sei $f(x) = \int g(x, t) d\mu(t) \quad (x \in N)$, N kompakt und $g : N \times K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist die Menge $B = \{ g(x, \cdot) \mid x \in N \}$ eine beschränkte und gleichgradig stetige Teilmenge von $C(K)$. Es gilt daher $e_n(B) \rightarrow 0$ und damit auch $e_n(B, \mu) = F_n \rightarrow 0$.

3. Beispiel:

Wir betrachten eine Volterra-Integralgleichung zweiter Art:

$$\varphi(x) = \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy + f(x) \quad (x \in [a, b]),$$

wobei k und f vorgegebene stetige Funktionen seien. Zusätzlich gelte $f(x) \neq 0$ auf einer dichten Teilmenge von $[a, b]$. Es ist naheliegend, in dieser Gleichung das Integral zu ersetzen durch eine Quadraturformel.

(Dieses Verfahren wird zum Beispiel in dem Buch MIKHLIN, SMOLITSKIY [1] S. 284 ff. vorgeschlagen).

Mit $\mu_n \in M_n$, $\mu_n(g) = \sum_{i=1}^n a_i g(x_i)$ (dabei seien die Stützstellen x_i der Größe nach geordnet: $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$) gilt dann für eine "Näherungslösung" $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_1 < x}}^n a_i k(x, x_i) \tilde{\varphi}(x_i) + f(x).$$

Dabei läßt sich die Funktion $\tilde{\varphi}$ sehr einfach ausrechnen; es fragt sich aber, wie gut hiermit die Lösung φ der Integralgleichung approximiert wird.

Hier gilt folgende Proposition:

Proposition

Mit $B = \left\{ \frac{1}{[a, x]} \cdot k(x, \cdot) \cdot \varphi \mid x \in [a, b] \right\}$ gilt:

$$\inf_{\tilde{\varphi}} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{\infty} = e_n(B, \lambda^1).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } e_n(B, \lambda^1) = & \inf_{a_i \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy - \right. \\ & \left. - \sum_{x_i < x} a_i k(x, x_i) \varphi(x_i) \right|. \end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt:

$$\begin{aligned} e_n(B, \lambda^1) = & \inf_{a_i \in \mathbb{R}} \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy - \right. \\ & \left. - \sum_{x_i < x} a_i k(x, x_i) \right|. \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x k(x, y) \varphi(y) dy - \sum_{x_i < x} a_i k(x, x_i) \tilde{\varphi}(x_i) \right|.$$

Hieraus folgt die Behauptung, wie man wieder mit Hilfe von Stetigkeitsüberlegungen einsieht. Dabei ist die Voraussetzung, daß f nicht auf einem ganzen Intervall verschwindet, wesentlich.

3. Anhang:

Eine abstraktere Formulierung der Ergebnisse über das asymptotische Verhalten von $e_n(B)$ und $\sigma_n(B)$ für Sobolev-Klassen mit Anwendungen auf Besov-Klassen

Die Ergebnisse aus 2.1 und 3.2 über das Verhalten der Größen $e_n(B)$ und $\sigma_n(B)$ für Sobolev-Klassen werden hier abstrakter formuliert und bewiesen. Die Resultate werden hierdurch vielleicht durchsichtiger und lassen sich jedenfalls auch auf andere Funktionenklassen, wie etwa Besov-Klassen, übertragen. Grundlegend für den Beweis ist wieder der Zerlegungssatz 2.1.3.11.

Satz

Es sei $s \in \mathbb{N}$ und V ein Vektorraum von reellwertigen Funktionen auf $[0,1]^S$. Der Raum V sei versehen mit einer Norm oder Halbnorm $\|\cdot\|$. Ist W ein Würfel in $[0,1]^S$, so sei V_W der Vektorraum der auf W eingeschränkten Funktionen aus V . Jeder Raum V_W sei versehen mit einer Norm oder Halbnorm $\|\cdot\|_W$.

Es existiere ein $m \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:

Zu jedem Würfel W in $[0,1]^S$ mit Seitenlänge $d > 0$ existiert ein m -dimensionaler Teilraum $P_W \subseteq V_W$ mit der Eigenschaft:

$$(V1) \quad \bigwedge_{f \in V_W} \bigvee_{g \in P_W} \|f - g\|_{\infty}^W \leq c \cdot d^{\alpha} \cdot \|f\|_W.$$

Hierbei seien $c > 0$ und $\alpha > 0$ unabhängig von f , W und d .

Überdies seien die Funktionen aus V beschränkt und meßbar.

Beziehungsweise:

$$(V2) \quad \bigwedge_{f \in V_W} \bigvee_{g \in P_W} \|f - g\|_2^W \leq c' d^{\alpha'} \cdot \|f\|_W.$$

Hierbei seien $c' > 0$ und $\alpha' > 0$ unabhängig von f , W und d .
 Überdies sei ein $\mu \in M([0,1]^S)$ vorgegeben und die Funktionen
 aus V seien quadratisch integrierbar bezüglich μ .

Es sei $\|f - g\|_2^W = \left(\int_W |f - g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$.

Weiter gelte:

Sind die Würfel W_i , $i = 1, \dots, l$ paarweise ohne gemeinsamen
 inneren Punkt, so gelte für jedes $f \in V$ die Beziehung:

$$(V3) \quad \sum_{i=1}^l \|f\|_{W_i} \leq \beta \cdot \|f\|$$

(wobei $\beta \geq 0$ unabhängig sei von f , l und den speziellen W_i)
 beziehungsweise:

$$(V4) \quad \sum_{i=1}^l \|f\|_{W_i}^2 \leq \beta' \cdot \|f\|^2$$

(wobei $\beta' \geq 0$ unabhängig sei von f , l und den speziellen W_i).

Dann gilt für die Einheitskugel ${}^1V = \{f \in V \mid \|f\| \leq 1\}$:

$$a) \quad e_n({}^1V) \leq r \cdot \left(\frac{\alpha'}{\beta} + \beta - 1 \right)$$

(Voraussetzungen V1 und V3)

$$b) \quad \sigma_n({}^1V) \leq r \cdot \left(\frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\beta'}{2} - 1 \right)$$

(Voraussetzungen V1 und V4)

$$c) \quad \sigma_n({}^1V, \mu) \leq r \cdot \left(\frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\beta'}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

(Voraussetzungen V2 und V4).

Beweis:

Behauptung a):

Gegeben sei $\mu \in M([0,1]^S)$ mit $\|\mu\| \leq 1$ und $\delta > 0$. Wir benützen
 Satz 2.1.3.11: Zu der Zerlegung Z_1 (siehe den Beweis von 2.1.3.11)

betrachten wir folgende Quadraturformel: Für $i = 1, \dots, N(\delta)$ gelte $\tilde{\mu}_i \in M_m$. Weiter habe $\tilde{\mu}_i$ seine Stützstellen in W_i und es gelte $\|\tilde{\mu}_i\| \leq \|\mu_i\|$ und $\tilde{\mu}_i(g) = \mu_i(g)$ für alle $g \in P_{W_i}$. Nach dem Interpolationssatz 1.2.1 existieren solche $\tilde{\mu}_i$, falls $V \subseteq C([0,1]^S)$. Ist die letzte Voraussetzung nicht erfüllt, muß man stattdessen Satz (4) aus dem 1. Anhang heranziehen und hat nur $\|\tilde{\mu}_i\| \leq \|\mu_i\| + \varepsilon$, wodurch sich der Beweis nicht wesentlich ändert.

Für die zusammengesetzte Quadraturformel $\mu_\delta = \sum_{i=1}^{N(\delta)} \tilde{\mu}_i$ gilt dann:

$\mu_\delta \in M_n$, wobei $n = m \cdot N(\delta)$, insbesondere

$$\mu_\delta \in M_{\tilde{n}} \text{ mit } \tilde{n} = m \cdot c \cdot \delta^{-\frac{s}{\alpha+s}}.$$

Für $f \in V$ gilt dann folgende Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} |\mu_\delta(f) - \mu(f)| &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} |\tilde{\mu}_i(f) - \mu_i(f)| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\tilde{\mu}_i - \mu_i\| \cdot \|f - g_i\|_{\infty}^{W_i} \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} 2 \cdot \|\mu_i\| \cdot c \cdot d^\alpha \cdot \|f\|_{W_i} \leq \\ &\leq 2 \cdot c \cdot \delta \cdot \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|f\|_{W_i} \leq 2 \cdot c \cdot \delta \cdot N(\delta)^\beta \cdot \|f\| \leq \\ &= \tilde{c} \delta^{-\frac{s\beta}{\alpha+s}} \cdot \|f\| = \tilde{c} \delta^{\frac{\alpha+s-s\beta}{\alpha+s}} \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

$$\text{Hieraus folgt } e_n(1V) \leq n^{-\frac{\alpha+s-s\beta}{s}} = n^{-\frac{\alpha}{s} + \beta - 1}.$$

Behauptung b):

Satz 3.1.6 gilt nur für positive Maße. Wir zerlegen daher das gegebene $\mu \in M([0,1]^S)$ in positiven und negativen Anteil und betrachten dann das zusammengesetzte Verfahren. Wir brauchen den Satz daher nur für positive μ zu beweisen. Sei also $\mu \in M([0,1]^S)$

positiv mit $\|\mu\| \leq 1$ und $\delta > 0$. Zu der Zerlegung Z_1 (Satz 2.1.3.11) betrachten wir folgende stochastische Quadraturformel:

Für $i = 1, \dots, N(\delta)$ gelte $Q_i \in S_m$. Weiter habe Q_i seine Stützstellen in W_i und es gelte:

- i) $E(Q_i(f)) = \mu_i(f)$ für alle $f \in L_1(\mu)$
- ii) $Q_i(f) = \mu_i(f)$ für alle $f \in P_{W_i}$
- iii) $\sigma^2(Q_i(f)) \leq \|\mu_i\| \cdot \inf_{g \in P_{W_i}} (\|f - g\|_2^{W_i})^2$

(Nach Satz 3.1.6 gibt es solche Q_i , da die μ_i nach Konstruktion insbesondere positiv sind).

Für die zusammengesetzte stochastische Quadraturformel

$$Q_\delta = \sum_{i=1}^{N(\delta)} Q_i \text{ gilt dann:}$$

- i) $Q_\delta \in S_n$ wobei $n = N(\delta) \cdot m < c \cdot m \cdot \delta^{-\frac{\alpha}{\alpha+s}}$
- ii) $E(Q_\delta(f)) = \mu(f)$ für alle $f \in L_1(\mu)$.

Für die Varianz von $Q_\delta(f)$ gilt (für $f \in V$) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q_\delta(f)) &= \sum_{i=1}^{N(\delta)} \sigma^2(Q_i(f)) \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\| \cdot \inf_{g \in P_{W_i}} (\|f - g\|_2^{W_i})^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\|^2 \cdot \inf_{g \in P_{W_i}} (\|f - g\|_\infty^{W_i})^2 \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\|^2 \cdot c^2 \cdot d^2 \alpha \cdot \|f\|_{W_i}^2 \leq \\ &\leq c^2 \delta^2 \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|f\|_{W_i}^2 \leq c^2 \delta^2 N(\delta) \beta' \|f\|^2 \leq c^2 \delta^2 \delta^{-\frac{\alpha}{\alpha+s}} \cdot \|f\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Daher gilt: } \sigma(Q_\delta(f)) \leq c' \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+s}} \cdot \|f\|.$$

$$\text{Inbesondere: } \sigma(Q_\delta(f)) \leq c' \delta^{\frac{\alpha}{\alpha+s}} \cdot \|f\|.$$

Behauptung c:

Wir gehen vor wie bei Behauptung b, wenden jetzt aber den Satz 2.1.3.11 für $\alpha = 2\alpha'$ an. Für die Varianz von $Q_\delta(f)$ gilt dann folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \sigma^2(Q_\delta(f)) &= \sum_{i=1}^{N(\delta)} \sigma^2(Q_i(f)) \leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\| \cdot \inf_{g \in P_{W_i}} (\|f - g\|_2^{W_i})^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|\mu_i\| \cdot c'^2 \cdot d^{2\alpha'} \cdot \|f\|_{W_i}^2 \leq c'^2 \cdot \delta \cdot \sum_{i=1}^{N(\delta)} \|f\|_{W_i}^2 \leq \\ &\leq c'^2 \cdot \delta \cdot N(\delta)^{\beta'} \|f\|^2 \leq c \delta \delta^{-\frac{s\beta'}{s+2\alpha'}} \cdot \|f\|^2 = \\ &= c \delta^{\frac{s+2\alpha'-s\beta'}{s+2\alpha'}} \cdot \|f\|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Daher gilt: } \sigma(Q_\delta(f)) \leq c \delta^{\frac{s+2\alpha'-s\beta'}{2s+4\alpha'}} \cdot \|f\|,$$

$$\text{wobei } Q_\delta \in S_n \text{ mit } n = m N(\delta) < c m \cdot \delta^{-\frac{s}{2\alpha'+s}}.$$

$$\text{Daher gilt: } \sigma_n({}^1V, \mu) \prec n^{-\frac{s+2\alpha'-s\beta'}{2s}} = n^{-\frac{\alpha'}{s} + \frac{\beta'}{2} - \frac{1}{2}}.$$

Anwendung des Satzes

a) Wendet man den Satz an auf die Hölder-Klassen $\tilde{C}^{k,\alpha}([0,1]^s)$ bzw. auf die Sobolev-Klassen $\tilde{W}_p^k([0,1]^s)$, so erhält man die bereits bewiesenen Abschätzungen. (Siehe: 1.2.8, 2.1.3.10, 3.2.5).

Hierbei hat man zu setzen:

$$\|f\|_W = \sup_{x \in W} |f(x)| \quad \text{im Falle } \tilde{C}^{k,\alpha}([0,1]^s) \quad \text{und}$$

$$\|f\|_W = \sum_{|\alpha|=k} \|f^{(\alpha)}\|_p^W \quad \text{im Falle } \tilde{W}_p^k([0,1]^s).$$

b) Wir wenden nun den Satz an auf Besov-Klassen.

Dazu zunächst einige Vorbereitungen:

Für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ und $1 \leq \theta < \infty$ sei

$$B_{p,\theta}^k([0,1]^S) = \{ f : [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{B_{p,\theta}^k} < \infty \}.$$

$$\text{Hierbei sei } \|f\|_{B_{p,\theta}^k} = \sum_{i=1}^s \left(\int_0^1 (t^{-k} \|\Delta_{t,i}^{k+1} f\|_p)^{\theta} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

wobei

$$(\Delta_{t,i} f)(x_1, \dots, x_s) = f(x_1, \dots, x_i+t, x_{i+1}, \dots, x_s) - f(x_1, \dots, x_s) \text{ falls } (x_1, \dots, x_i+t, x_{i+1}, \dots, x_s) \in [0,1]^S$$

$$\text{und sonst } (\Delta_{t,i} f)(x_1, \dots, x_s) = 0$$

$$\text{und: } \Delta_{t,i}^{k+1} f = \Delta_{t,i}^k (\Delta_{t,i} f).$$

(Die Norm im Besov-Raum $B_{p,\theta}^k$ wird dann durch

$$\|f\| = \|f\|_p + \|f\|_{B_{p,\theta}^k} \text{ oder eine dazu äquivalente Norm}$$

definiert. Vergleiche BESOV [2] und TRIEBEL [1]).

Für die Besov-Räume gelten die gleichen Einbettungssätze wie für die Sobolev-Räume. Dies wurde 1961 von Besov gezeigt.

Siehe dazu die eben genannten Arbeiten und die Übersichtsarbeit BESOV u.a. [1].

Um den Satz anwenden zu können, brauchen wir zunächst die zu 2.1.1.5 analoge Ungleichung. Mit Ungleichungen dieser Art beschäftigen sich die Arbeiten DAHMEN u.a. [1] und NIKOLSKII [1]. Aus Theorem 1 der letztgenannten Arbeit folgt:

Hilfssatz (1):

Es sei $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \theta < \infty$.

Im Fall $sk - p > 0$ gelte zusätzlich $\theta \leq \frac{skp}{sk-p}$.

Dann existiert ein $c > 0$ derart, daß für jedes $f \in b_{p,\theta}^k([0,1]^s)$ ein Polynom $g \in P(k,s)$ existiert, so daß gilt:

$$\|f - g\|_p \leq c \cdot \|f\|_{b_{p,\theta}^k}.$$

Mit Hilfe von Hilfssatz (1) und dem Einbettungssatz folgt wieder (siehe 2.1.1.7, 3.2.2) der entsprechende Approximationssatz:

Hilfssatz (2):

a) Es sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \theta < \infty$ mit $\theta < \frac{skp}{sk-p}$ im Falle $sk - p > 0$. Weiter gelte $kp > s$.

Dann existiert ein $c > 0$, so daß für jedes $f \in b_{p,\theta}^k([a,b]^s)$ ein $g \in P(k,s)$ existiert mit:

$$\|f - g\|_\infty \leq c \cdot \|f\|_{b_{p,\theta}^k} \cdot (b - a)^{k - \frac{s}{p}}.$$

b) Es sei $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \theta < \infty$ mit $\theta < \frac{2sk}{sk-2}$ im Falle $sk - 2 > 0$.

Dann existiert ein $c > 0$, so daß für jedes $f \in b_{2,\theta}^k([a,b]^s)$ ein $g \in P(k,s)$ existiert mit:

$$\|f - g\|_2 \leq c \cdot \|f\|_{b_{2,\theta}^k} \cdot (b - a)^k.$$

Jetzt sind noch die richtigen, d.h. kleinsten Konstanten β und β' bei den Voraussetzungen (V3) und (V4) zu bestimmen.

Es gilt:

Hilfssatz (3):

Sind die Würfel W_i , $i = 1, \dots, l$ paarweise ohne gemeinsamen inneren Punkt, so gilt für jedes $f \in b_{p,\theta}^k([0,1]^s)$:

$$\sum_{i=1}^l \|f|_{W_i}\|_{b_{p,\theta}^k} \leq l^{1 - \frac{1}{p}} \|f\|_{b_{p,\theta}^k}.$$

Im Fall $p \geq 2$ gilt außerdem:

$$\sum_{i=1}^1 (\|f\|_{W_i} \|b_{p,\theta}^k\|)^2 \leq 1^{1-\frac{2}{p}} (\|f\|_{b_{p,\theta}^k})^2.$$

Wir verzichten auf den einfachen Beweis, der sich dadurch ergibt, daß die entsprechenden Ungleichungen für die p -Normen gelten (siehe 2.1.3.4).

Wir können nun den Satz anwenden und erhalten folgende Folgerungen:

- a) Es sei $1 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \theta < \infty$ mit $\theta < \frac{skp}{sk-p}$ im Falle $sk - p > 0$. Weiter gelte $kp > s$.

Dann gilt:

$$e_n({}^1b_{p,\theta}^k([0,1]^s)) \prec n^{\frac{k}{s}}.$$

- b) Gilt zusätzlich $p \geq 2$, so folgt:

$$\sigma_n({}^1b_{p,\theta}^k([0,1]^s)) \prec n^{\frac{k}{s} - \frac{1}{2}}.$$

- c) Es sei $2 \leq p < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq \theta < \infty$ mit $\theta < \frac{skp}{sk-p}$ im Falle $sk - p > 0$. Weiter sei $\mu = g \cdot \lambda^s \in M([0,1]^s)$ mit beschränktem g .

Dann gilt:

$$\sigma_n({}^1b_{p,\theta}^k([0,1]^s)) \prec n^{-\frac{k}{s} - \frac{1}{2}}.$$

Literaturverzeichnis

Bahvalov, N.S. [1]

Über näherungsweise Berechnung von Integralen (Russisch)

Vestnik MGU, Ser. Math. Mech. Astron. Phys. Chem., 4 (1959), 3-18

Bahvalov, N.S. [2]

On the optimality of linear methods for operator approximation
in convex classes of functions

U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys., 11 (1971), 244-249

Banach, S. [1]

Théorie des opératons linéaires

Warschau 1932

Besov, O.V. [1]

Intercellular averages and an error estimate for cubature
formulas in Sobolev spaces and their generalizations

Proc. of the Steklov Inst. of Math, 1980, Issue 1, 45-60

Besov, O.V. [2]

Error estimates for cubature formulas in terms of smoothness
of functions

Proc. of the Steklov Inst. of Math., 1981, Issue 4, 11-23

Besov, O.V. u.a. [1]

Imbedding theory for classes of differentiable functions
of several variables

Amer. Math. Soc. Transl. (2) 105 (1976), 57-94

Böhrer, K. [1]

Spline-Funktionen

Teubner, Stuttgart 1974

Brass, H. [1]

Quadraturverfahren

Göttingen 1977

Brass, H.; Schmeisser, G. [1]

Error estimates for interpolatory quadrature formulas
Numer. Math., 37 (1981), 371-386

Burenkov, V.I. [1]

On a method of extending differentiable functions
Proc. of the Steklov Inst. of Math., 1979, Issue 1, 27-70

Dahmen, W.; De Vore, R.; Scherer, K. [1]

Multi-dimensional spline approximation
Siam J. Numer. Anal., 17 (1980), 380-402

De Boor, C.; De Vore, R.; Höllig, K. [1]

Mixed norm n -widths
Proc. of the AMS, 80 (1980), 577-583

Ermakow, S.M. [1]

Die Monte-Carlo-Methode und verwandte Fragen
München etc. 1975

Ermakow, S.M.; Zolotukhin, V.G. [1]

Polynomial approximations and the Monte Carlo method
Theor. Prob. and Appl., 5 (1960), 428-431

Grothendieck, A. [1]

Sur les applications linéaires faiblement compactes
d'espaces du type $C(K)$
Canad. J. Math., 5 (1953), 129-173

Haber, S. [1]

Numerical evaluation of multiple integrals
Siam Review, 12 (1970), 481-526

Haber, S. [2]

Stochastic quadrature formulas
Math. of comp., 23 (1969), 751-764

Hammersley, J.M.; Handscomb, D.C. [1]

Monte Carlo Methods

London, New York 1964

Handscomb, D.C. [1]

Remarks on a Monte Carlo Integration Method

Numerische Mathematik 6 (1964), 261-268

Höllig, K. [1]

Diameters of classes of smooth functions

in: Quantitative approximation Proc. Symp. 1979

Ed. by R.A. De Vore, K. Scherer

Academic Press, New York etc. 1980

Höllig, K. [2]

Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen

Dissertation, Bonn 1979

Höllig, K. [3]

Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen

Math. Ann., 242 (1979), 273-281

Jackson, D. [1]

The theory of approximation

New York 1930

Kashin, B.S. [1]

The width of certain finite dimensional sets and classes
of smooth functions

Math. USSR Izvestija, 11 (2) (1977)

kashin, B.S. [2]

On estimates of diameters

in: Quantitative approximation. Proc. Symp. 1979.

Ed. by R.A. De Vore, K. Scherer

Academic Press, New York etc. 1980

Kolmogorov, A.N. [1]

Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse
Ann. of Math., 31 (1936), 107-111

Korneicuk, N.P. [1]

Widths in L_p of classes of continuous and of differentiable
functions, and optimal methods of coding and recovering
functions and their derivatives
Math. USSR Izvestija, 18 (1982), 227-247

Kufner, A.; John, O.; Fucik, S. [1]

Function Spaces
Leyden, 1977

Levin, M.; Girshovich, J. [1]

Optimal quadrature formulas
Teubner, Leipzig, 1979

Lorentz, G.G. [1]

Approximation of functions
Holt, Rinehart and Winston, New York etc. 1966

Lorentz, G.G. [2]

Lower bounds for the degree of approximation
Trans. AMS, 97 (1960), 25-34

Lubitz, C. [1]

Weylzahlen von Diagonaloperatoren und Sobolev-Einbettungen
Bonner Mathematische Schriften, Bonn 1982

Meinardus, G. [1]

Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung
Springer 1964

Mikhlin, G.G.; Smolitskiy, K.L. [1]

Approximate methods for solution of differential and
integral equations
New York 1967

Mitrinović, D.S. [1]

Analytic Inequalities

Grundlehren Band 165

Springer 1970

Nikolskii, Jn.S. [1]

Inequalities between different seminorms of differentiable functions of several variables

Proc. of the Steklov Inst. of Math., 1981, Issue 4, 255-280

Parfenov, O.G. [1]

Asymptotic behavior of the diameters of certain classes of analytic functions

Funct. Anal. and its appl. 15 (1982), 304-305

Pinkus, A. [1]

Basic properties of n-widths

Technien Preprint No. MT-518

Technien-Israel Institute of Technology, Haifa 1981

Polovinkin, V.I. [1]

Sequences of functionals with a boundary layer

Siberian Math. J., 15 (1974), 296-308

Schaefer, H.H. [1]

Banach lattices and positive operators

Springer, Grundlehren, 1974

Schumaker, L.L. [1]

Spline functions: Basic theory

John Wiley and Sons, New York etc. 1981

Semadeni, Z. [1]

Banach spaces of continuous functions, Vol 1

Warschau 1971

Shapiro, H.S. [1]

Topics in approximation theory
Lecture notes in Math. 187, 1971

Shapiro, H.S. [2]

Integral representation of remainder functionals in one
and several variables
in: Multivariate approximation, ed. by D.C.Handscorn,
Academic Press London etc. 1978

Sobolev, S.L. [1]

Applications of functional analysis in mathematical physics
AMS, Providence, R.I. 1963

Sobolev, S.L. [2]

On the order of convergence of cubature formulas
Soviet Math. Dokl., 6 (1965), 808-811

Strauss, H. [1]

Optimal quadrature formulas
in: Approximation in Theorie und Praxis
Ed.: G. Meinardus, Mannheim etc. 1979, 239-250

Tihomirov, V.M. [1]

Widths of sets in functional spaces and the theory of
best approximations
Russian Math. Surv., 15 (3) (1960), 75-112

Tihomirov, V.M. [2]

Einige Probleme der Approximationstheorie (Russisch)
Verlag der Moskauer Universität 1976

Traub, J.F.; Woźniakowski, H. [1]

A general theory of optimal algorithms
Academic Press, New York etc. 1980

Triebel, H. [1]

Interpolation theory, function spaces, differential operators
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1978

Zhensykbayev, A.A. [1]

On the best weighted quadrature formulas
in: Approximation and function spaces
Proc. of the Int. Conf. Gdansk, 1979
ed. Z. Ciesielski
North Holland, Amsterdam etc. 1981

Zhensykbayev, A.A. [2]

Optimal recovery methods for the integral on classes of
differentiable functions
Analysis Math., 7 (1981), 303-318

Zhensykbayev, A.A. [3]

Extremal properties of monosplines and best quadrature formulas
Mathematical Notes, 31 (1982), 145-154

Zhensykbayev, A.A. [4]

Monosplines of minimal norms and the best quadrature formulas
Russian Math. Surv., 36 (4) (1981), 121-180

Zubrzycki, S. [1]

Some approximate integration formulas of statistical interest
Coll. Math., 11 (1963/64), 123-135

Lebenslauf

Am 9. Januar 1953 wurde ich als Sohn des Diplom Ingenieurs Dr. Heinrich Novak und seiner Ehefrau Esther Novak, geborene Braun, in Nürnberg geboren.

Von 1959 bis 1963 besuchte ich die Volksschule in Nürnberg, dann das Realgymnasium in Nürnberg, wo ich 1973 das Abitur machte.

Von 1973 bis 1979 studierte ich in Erlangen Mathematik und Physik, im Jahr 1979 machte ich das Diplom in Mathematik.

Ab 1975 war ich am Mathematischen Institut in Erlangen als studentische Hilfskraft, später als wissenschaftliche Hilfskraft, tätig.

Seit 1980 bin ich dort als wissenschaftlicher Mitarbeiter angestellt.

Erlangen, im Januar 1983

